

Corrigé du contrôle de maths L2 : séries alternées et semi-convergence

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours, le critère spécial des séries alternées	4 points
Exercice 2 : Critère de Cauchy et convergence absolue	3 points
Exercice 3 : Séries de Bertrand et développement asymptotique	5 points
Exercice 4 : Un produit de Cauchy divergent	3 points
Exercice 5 : Problème, transformation d'Abel pour la série de $\sin(n)/n$	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours, le critère spécial des séries alternées (4 points)

a. **Critère spécial des séries alternées.** Si (a_n) est une suite réelle décroissante de limite nulle,

alors la série $\sum (-1)^n a_n$ converge. De plus, son reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$ et il est du signe de son premier terme $(-1)^{n+1} a_{n+1}$.

b. La suite (a_n) est décroissante et tend vers 0, donc elle est positive. On calcule :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0, \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0.$$

Ainsi, (S_{2n}) est décroissante et (S_{2n+1}) est croissante. De plus,
 $S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \rightarrow 0$. **Les deux suites sont donc adjacentes** : elles convergent vers une même limite S . Les suites extraites des rangs pairs et impairs ayant la même limite, (S_n) converge vers S : **la série $\sum (-1)^n a_n$ converge**.

- c. Par adjacence, $S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p}$ pour tout p . Si $n = 2p$ est pair, alors $S_{n+1} \leq S \leq S_n$, d'où $-a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \leq R_n \leq 0$. Si $n = 2p+1$ est impair, alors $S_n \leq S \leq S_{n+1}$, d'où $0 \leq R_n \leq S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$. Dans les deux cas, $|R_n| \leq a_{n+1}$ et R_n a le signe de $(-1)^{n+1}$.

Barème : a) 1 point (0,5 pour les hypothèses et la convergence, 0,5 pour le reste) ; b) 2 points : 0,5 par monotonie, 0,5 pour la différence qui tend vers 0, 0,5 pour la conclusion par les suites extraites ; c) 1 point : 0,5 par cas.

Exercice 2 : Critère de Cauchy et convergence absolue (3 points)

- a. La somme $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ compte n termes, chacun supérieur ou égal à $\frac{1}{2n}$.
 Donc $H_{2n} - H_n \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Si la série convergeait, le critère de Cauchy fournirait, pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$, un rang N tel que $|H_q - H_p| \leq \frac{1}{4}$ pour $q > p \geq N$. Avec $p = N$ et $q = 2N$, c'est contradictoire. **La série harmonique diverge.**
- b. Soit $\sum u_n$ absolument convergente et $\varepsilon > 0$. La série $\sum |u_n|$ converge, donc elle vérifie le critère de Cauchy : il existe N tel que $\sum_{k=p+1}^q |u_k| \leq \varepsilon$ pour $q > p \geq N$. Par l'inégalité triangulaire, $\left| \sum_{k=p+1}^q u_k \right| \leq \sum_{k=p+1}^q |u_k| \leq \varepsilon$. Les sommes partielles de $\sum u_n$ forment donc une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Or $\mathbb{R}$ est complet : $\sum u_n$ **converge**.
- c. D'une part, $\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, terme d'une série de Riemann convergente : $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ **est absolument convergente, donc convergente**. D'autre part, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ décroît vers 0 : la série converge par le critère spécial. Mais $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann,

$\frac{1}{2} \leq 1$) : $\sum \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ est semi-convergente.

Barème : a) 1 point (0,5 pour la minoration, 0,5 pour la négation du critère de Cauchy) ; b) 1 point (inégalité triangulaire et complétude citée) ; c) 1 point : 0,5 par série.

Exercice 3 : Séries de Bertrand et développement asymptotique (5 points)

a. La fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$, car t et $(\ln t)^\beta$ sont positifs et croissants. Par comparaison série-intégrale, $\sum f(n)$ et $\int_2^{+\infty} f$ ont

la même nature. Avec le changement de variable $u = \ln t$, on obtient

$\int_2^x f(t) dt = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{du}{u^\beta}$. Cette intégrale a une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$ si et seulement si $\beta > 1$ (intégrale de Riemann en $+\infty$). **La série converge si et seulement si $\beta > 1$.**

b. La suite $\left(\frac{1}{n \ln n}\right)_{n \geq 2}$ est décroissante (produit de deux suites positives croissantes au dénominateur) et tend vers 0. Le critère spécial donne la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{n \ln n}$. En revanche, la série des valeurs absolues est la série de Bertrand avec $\beta = 1$, divergente d'après a). **La série est donc semi-convergente.**

c. Pour $n \geq 2$ et $\alpha > 0$, on a $n^\alpha \geq 2^\alpha > 1$, donc $n^\alpha + (-1)^n \geq n^\alpha - 1 > 0$: u_n est bien défini. Ensuite :

$$u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = (-1)^n \frac{n^\alpha - n^\alpha - (-1)^n}{n^\alpha(n^\alpha + (-1)^n)} = -\frac{(-1)^{2n}}{n^\alpha(n^\alpha + (-1)^n)} = v_n.$$

d. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge par le critère spécial, car $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ décroît vers 0 pour $\alpha > 0$. Par ailleurs, $v_n < 0$ et $-v_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$. Par équivalence de séries de signe constant, $\sum v_n$ converge si et seulement si $2\alpha > 1$. Ainsi $\sum u_n$, somme d'une série convergente et de $\sum v_n$, converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$. Pour la convergence absolue,

$|u_n| = \frac{1}{n^a + (-1)^n} \sim \frac{1}{n^a}$, donc $\sum |u_n|$ converge si et seulement si $a > 1$. **Bilan :**
absolument convergente pour $a > 1$, **semi-convergente pour** $\frac{1}{2} < a \leq 1$, **divergente pour** $0 < a \leq \frac{1}{2}$.

Erreur fréquente : appliquer le critère spécial à $\sum u_n$ directement. La suite $\left(\frac{1}{n^a + (-1)^n}\right)$ n'est pas décroissante, et la série peut diverger alors que son terme alterne et tend vers 0.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour les hypothèses de la comparaison série-intégrale, 0,5 pour le changement de variable, 0,5 pour la conclusion ; b) 1 point ; c) 1 point (0,5 pour la définition, 0,5 pour le calcul) ; d) 1,5 point : 0,5 pour $\sum u_n$, 0,5 pour la convergence, 0,5 pour la convergence absolue.

Exercice 4 : Un produit de Cauchy divergent (3 points)

a. La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ est décroissante de limite nulle, donc $\sum a_n$ **converge** par le critère spécial. Elle n'est pas absolument convergente : $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$, terme d'une série de Riemann divergente.

b. Pour $0 \leq k \leq n$, on a $a_k a_{n-k} = \frac{(-1)^k (-1)^{n-k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$, d'où la formule de c_n . L'inégalité $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, valable pour tous réels, donne avec $x = k+1$ et $y = n-k+1$:

$$(k+1)(n-k+1) \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^2, \text{ donc } \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{2}{n+2}.$$

En sommant les $n+1$ termes, $|c_n| \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$.

c. Pour tout $n \geq 0$, $2(n+1) \geq n+2$, donc $|c_n| \geq 1$. Le terme général ne tend pas vers 0 : $\sum c_n$ **diverge grossièrement**. Le théorème sur le produit de Cauchy exige que les deux séries soient **absolument convergentes**. Ici, $\sum a_n$ n'est que semi-convergente.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 0,5 pour la formule de C_n , 1 pour la minoration ; c) 1 point : 0,5 pour la divergence grossière, 0,5 pour l'hypothèse manquante.

Exercice 5 : Problème, transformation d'Abel pour la série de $\sin(n)/n$ (5 points)

a. On a $T_n = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^n e^{ik}\right)$. Comme $e^i \neq 1$, la somme géométrique vaut $e^i \frac{1-e^{in}}{1-e^i}$.

Pour tout réel θ , $|1 - e^{i\theta}| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$. Ainsi

$$|T_n| \leq \left| \sum_{k=1}^n e^{ik} \right| \leq \frac{2}{2\sin(1/2)} = \frac{1}{\sin(1/2)},$$

car $|1 - e^{in}| \leq 2$ et $\sin\frac{1}{2} > 0$. **La suite (T_n) est bornée par $M = \frac{1}{\sin(1/2)}$.**

b. On écrit $\sin k = T_k - T_{k-1}$ pour $k \geq 1$, puis on décale l'indice dans la seconde somme :

$$\sum_{k=1}^n \frac{T_k - T_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{T_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_k}{k+1} = \frac{T_n}{n} - T_0 + \sum_{k=1}^{n-1} T_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Comme $T_0 = 0$, on obtient **la formule demandée.**

c. D'abord, $\left| \frac{T_n}{n} \right| \leq \frac{M}{n} \rightarrow 0$. Ensuite, $\left| T_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right| \leq M \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$, terme positif d'une série télescopique convergente (de somme M). La série $\sum T_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ est donc absolument convergente, donc convergente. Les deux termes du membre de droite ont une limite finie : $\sum \frac{\sin n}{n}$ **converge.**

d. Pour $n \geq 1$, $\frac{|\sin n|}{n} \geq \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos(2n)}{2n}$. La série $\sum \frac{1}{2n}$ diverge et $\sum \frac{\cos(2n)}{2n}$ converge, donc leur différence $\sum \frac{\sin^2 n}{n}$ diverge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{|\sin n|}{n}$ **diverge : la série $\sum \frac{\sin n}{n}$ est semi-convergente.**

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la somme géométrique, 0,5 pour le module, 0,5 pour la majoration ; b) 1,5 point : 1 pour le décalage d'indice, 0,5 pour la formule finale ; c) 1 point : 0,5 par terme ; d) 1 point : 0,5 pour la divergence de $\sum \frac{\sin^2 n}{n}$, 0,5 pour la comparaison.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : séries alternées et semi-convergence

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Séries à termes quelconques](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries à termes quelconques](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).