

Corrigé du contrôle de maths L2 : produit scalaire et espaces euclidiens

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : inégalité de Cauchy-Schwarz	4 points
Exercice 2 : Gram-Schmidt sur des polynômes	6 points
Exercice 3 : Projection orthogonale dans $\mathbb{R}^4$	4 points
Exercice 4 : Problème : droite des moindres carrés	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : inégalité de Cauchy-Schwarz (4 points)

a. **Énoncé.** Pour tous x, y d'un espace préhilbertien réel E , on a $|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|$.

Démonstration. Si $y = 0$, les deux membres sont nuls et l'inégalité est vraie. Supposons $y \neq 0$. Pour tout réel λ , la positivité du produit scalaire et sa bilinéarité donnent

$$0 \leq |x + \lambda y|^2 = |y|^2 \lambda^2 + 2 \langle x, y \rangle \lambda + |x|^2.$$

Le membre de droite est un trinôme du second degré en λ , car $|y|^2 > 0$. Il est positif pour tout

réel λ , donc son discriminant est négatif ou nul :

$$\Delta = 4 \langle x, y \rangle^2 - 4 |x|^2 |y|^2 \leq 0.$$

Donc $\langle x, y \rangle^2 \leq |x|^2 |y|^2$, c'est-à-dire $|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|$.

- b. Supposons la famille (x, y) liée. Si $y = 0$, l'égalité est claire. Sinon, $x = \mu y$ pour un réel μ , et $|\langle x, y \rangle| = |\mu| |y|^2 = |x| |y|$.

Réciproquement, supposons l'égalité et $y \neq 0$ (si $y = 0$, la famille est liée). Alors $\Delta = 0$: le trinôme admet une racine double λ_0 . Ainsi $|x + \lambda_0 y|^2 = 0$, donc $x + \lambda_0 y = 0$ par le caractère défini du produit scalaire, et la famille est liée.

Il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Barème : a) 2,5 points : 0,5 pour l'énoncé, 0,5 pour le cas $y = 0$, 1 pour le développement du trinôme, 0,5 pour l'argument du discriminant ; b) 1,5 point : 0,5 pour le sens direct, 1 pour la réciproque avec le caractère défini.

Exercice 2 : Gram-Schmidt sur des polynômes (6 points)

- a. L'application $(P, Q) \rightarrow \int_0^1 PQ$ est bien définie car PQ est continue sur $[0, 1]$. Elle est symétrique, car $PQ = QP$, et linéaire par rapport à P par linéarité de l'intégrale ; elle est donc bilinéaire.

Elle est positive : $\langle P, P \rangle = \int_0^1 P(t)^2 dt \geq 0$. Elle est définie : si $\int_0^1 P^2 = 0$, la fonction P^2 est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, donc nulle sur $[0, 1]$. Le polynôme P a alors une infinité de racines, donc $P = 0$.

C'est un produit scalaire sur E .

b. On rappelle que $\langle X^i, X^j \rangle = \frac{1}{i+j+1}$.

Étape 1. On a $\|1\|^2 = 1$, donc $e_0 = 1$.

Étape 2. On pose $v_1 = X - \langle X, e_0 \rangle e_0 = X - \frac{1}{2}$. Alors

$$\|v_1\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

D'où $e_1 = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2X - 1)$.

Étape 3. On calcule $\langle X^2, e_0 \rangle = \frac{1}{3}$ et

$$\langle X^2, e_1 \rangle = \sqrt{3} \int_0^1 (2t^3 - t^2) dt = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}. \text{ Alors}$$

$$v_2 = X^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{3}(2X - 1) = X^2 - X + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(6X^2 - 6X + 1).$$

On développe $(6t^2 - 6t + 1)^2 = 36t^4 - 72t^3 + 48t^2 - 12t + 1$, d'où

$$\int_0^1 (6t^2 - 6t + 1)^2 dt = \frac{36}{5} - 18 + 16 - 6 + 1 = \frac{1}{5}.$$

Ainsi $\|v_2\|^2 = \frac{1}{36} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{180}$ et $e_2 = \sqrt{180} v_2 = 6\sqrt{5} v_2$.

La base orthonormée obtenue est $e_0 = 1$, $e_1 = \sqrt{3}(2X - 1)$,
 $e_2 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$.

c. Comme (e_0, e_1, e_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$, le projeté orthogonal est

$$p = \sum_{i=0}^2 \langle X^3, e_i \rangle e_i. \text{ On calcule :}$$

$$\langle X^3, e_0 \rangle = \frac{1}{4}, \quad \langle X^3, e_1 \rangle = \sqrt{3} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{20},$$

$$\langle X^3, e_2 \rangle = \sqrt{5} \left(1 - \frac{6}{5} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\sqrt{5}}{20}.$$

Donc

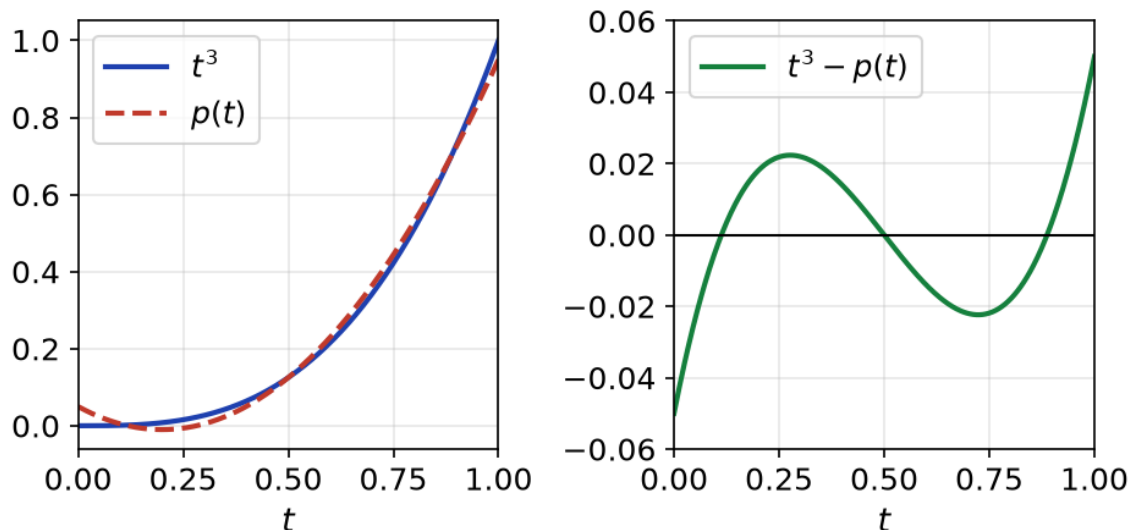
$$p = \frac{1}{4} + \frac{9}{20}(2X - 1) + \frac{1}{4}(6X^2 - 6X + 1) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{5}X + \frac{1}{20}.$$

Le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est $p = \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{5}X + \frac{1}{20}$.

Le minimum m est le carré de la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$, atteint en p . Par le théorème de Pythagore, $|X^3|^2 = |p|^2 + |X^3 - p|^2$ avec $|p|^2 = \sum \langle X^3, e_i \rangle^2$:

$$m = \frac{1}{7} - \left(\frac{1}{16} + \frac{27}{400} + \frac{5}{400} \right) = \frac{1}{7} - \frac{57}{400} = \frac{400 - 399}{2800}.$$

Donc $m = \frac{1}{2800}$, **atteint pour** $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{3}{5}$, $c = \frac{1}{20}$.



La figure montre que l'écart $t^3 - p(t) = \frac{1}{20}(20t^3 - 30t^2 + 12t - 1)$ reste petit et change trois fois de signe sur $[0, 1]$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la bilinéarité et la symétrie, 1 pour le caractère défini ; b) 2,5 points : 0,5 pour e_0 , 1 pour e_1 , 1 pour e_2 avec le calcul de la norme ; c) 2 points : 1 pour $\mathcal{P}$, 1 pour la valeur de m justifiée.

Erreur fréquente : oublier de normer v_1 avant de calculer v_2 ; la formule $v_2 = X^2 - \sum \langle X^2, e_i \rangle e_i$ n'est valable qu'avec des vecteurs e_i unitaires.

Exercice 3 : Projection orthogonale dans $\mathbb{R}^4$ (4 points)

a. Posons $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, -1, 1, -1)$. Alors

$F = \{x : \langle x, u \rangle = 0 \text{ et } \langle x, v \rangle = 0\} = \text{Vect}(u, v)^\perp$. Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, donc $\text{Vect}(u, v)$ est de dimension 2 et $\dim F = 4 - 2 = 2$.

En dimension finie, $F^\perp = (\text{Vect}(u, v)^\perp)^\perp = \text{Vect}(u, v)$. De plus $\langle u, v \rangle = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$. Ainsi $\dim F = 2$ et (u, v) est une base orthogonale de $F^\perp$.

b. On a $|u|^2 = |v|^2 = 4$. La projection orthogonale sur $F^\perp$ s'écrit

$$q(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{4} u + \frac{\langle x, v \rangle}{4} v,$$

de matrice $Q = \frac{1}{4}(u u^T + v v^T)$. Le coefficient (i, j) de $u u^T + v v^T$ vaut $1 + (-1)^{i+j}$, soit 2 si $i + j$ est pair et 0 sinon. Donc

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = I_4 - Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q est la matrice de la projection sur $F^\perp$ et $P = I_4 - Q$ celle de la projection sur F , car $\mathbb{R}^4 = F \oplus F^\perp$.

c. La distance de w à F est $|w - p_F(w)| = |q(w)|$. On a $\langle w, u \rangle = 10$ et $\langle w, v \rangle = 1 - 2 + 3 - 4 = -2$. Comme u et v sont orthogonaux, le théorème de Pythagore donne

$$|q(w)|^2 = \frac{10^2}{4} + \frac{(-2)^2}{4} = 25 + 1 = 26.$$

Vérification : $q(w) = Q w = (2, 3, 2, 3)$, de norme $\sqrt{4 + 9 + 4 + 9} = \sqrt{26}$. La distance de w à F vaut $\sqrt{26}$.

Barème : a) 1 point : 0,5 pour la dimension, 0,5 pour la base orthogonale de $F^\perp$; b) 1,5 point : 1 pour Q , 0,5 pour P ; c) 1,5 point : 1 pour la méthode, 0,5 pour $\sqrt{26}$.

Exercice 4 : Problème : droite des moindres carrés (6 points)

- a. Notons $V = \text{Im } A = \{AU : U \in \mathbb{R}^2\}$, sous-espace de $\mathbb{R}^4$. Ses générateurs, les colonnes $c_1 = (0, 1, 2, 3)$ et $c_2 = (1, 1, 1, 1)$, ne sont pas colinéaires : $\dim V = 2$ et A est injective.

D'après le théorème de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, pour tout $Z \in V$, on a $|Y - Z| \geq |Y - p_V(Y)|$, avec égalité si et seulement si $Z = p_V(Y)$. Donc $S(a, b) = |Y - AU|^2$ est minimal si et seulement si $AU = p_V(Y)$. Comme A est injective, ce vecteur U est unique.

Enfin, $AU = p_V(Y)$ équivaut à $Y - AU \in V^\perp$, c'est-à-dire $\langle c_j, Y - AU \rangle = 0$ pour $j = 1, 2$, soit $A^T(Y - AU) = 0$. **Le minimum existe, il est atteint en un unique U , caractérisé par $A^T A U = A^T Y$.**

- b. On calcule

$$A^T A = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T Y = \begin{pmatrix} 0 + 2 + 4 + 2 \\ 1 + 2 + 2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de $A^T A$ vaut $56 - 36 = 20$. Donc

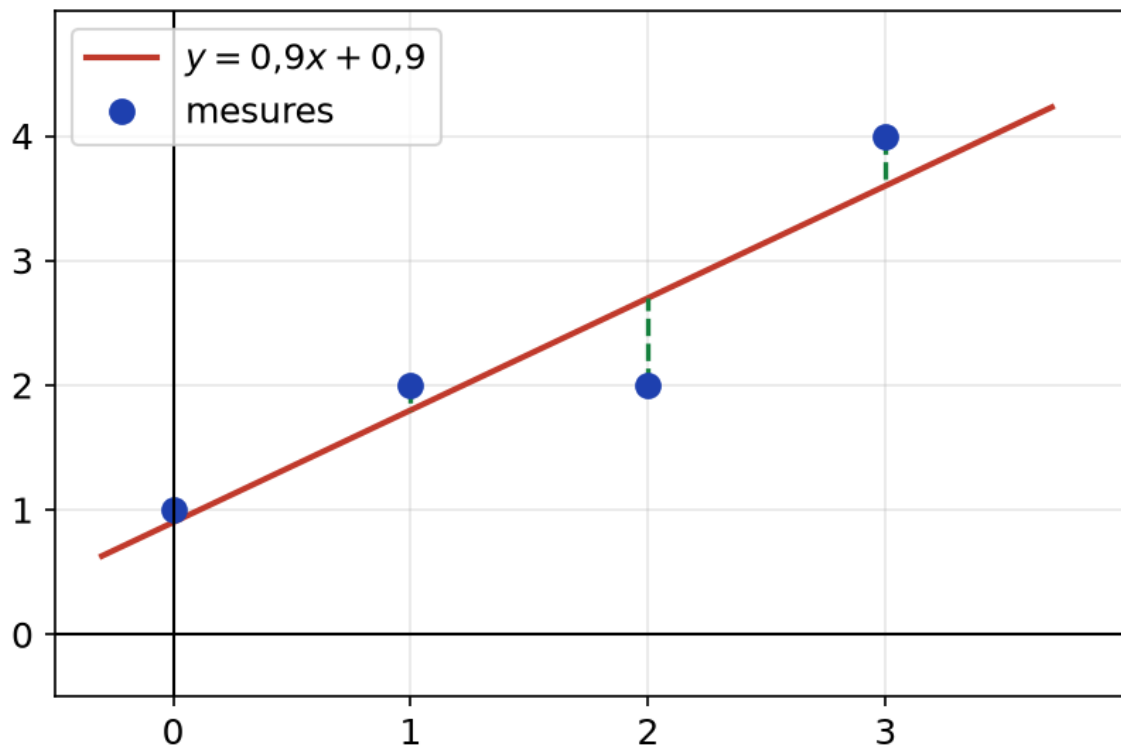
$$U = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

La droite des moindres carrés a pour équation $y = 0,9x + 0,9$: $a = b = \frac{9}{10}$.

- c. On a $AU = (0,9 ; 1,8 ; 2,7 ; 3,6)$, donc $Y - AU = (0,1 ; 0,2 ; -0,7 ; 0,4)$ et

$$S_{\min} = 0,01 + 0,04 + 0,49 + 0,16 = 0,7.$$

La valeur minimale vaut $\frac{7}{10}$: c'est le carré de la distance de Y au plan $\text{Im } A$ de $\mathbb{R}^4$.



d. Avec $r = Y - AU = (0,1 ; 0,2 ; -0,7 ; 0,4) :$

$$\langle r, c_1 \rangle = 0 + 0,2 - 1,4 + 1,2 = 0, \quad \langle r, c_2 \rangle = 0,1 + 0,2 - 0,7 + 0,4 = 0.$$

Le vecteur des résidus est bien orthogonal à $\text{Im } A$, comme l'exige la caractérisation de la projection orthogonale.

Barème : a) 2 points : 0,5 pour la dimension de l'image, 1 pour le théorème de projection, 0,5 pour les équations normales ; b) 2 points : 1 pour les deux produits matriciels, 1 pour la résolution ; c) 1 point : 0,5 pour la valeur, 0,5 pour l'interprétation ; d) 1 point (0,5 par produit scalaire).

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : produit scalaire et espaces euclidiens

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Espaces euclidiens](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces euclidiens](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).