

Corrigé du contrôle de maths L2 : polynômes d'endomorphismes et trigonalisation

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : le lemme des noyaux	4 points
Exercice 2 : Un polynôme annulateur de degré 2	4 points
Exercice 3 : Endomorphismes nilpotents	4 points
Exercice 4 : Trigonalisation et système différentiel	8 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : le lemme des noyaux (4 points)

- a. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est **annulateur** de u si $P(u) = 0$. L'ensemble I_u des polynômes annulateurs est un idéal de $\mathbb{K}[X]$: il est stable par somme et par multiplication par un polynôme quelconque. Il n'est pas réduit à $\{0\}$. En effet, $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2 , donc la famille $(\text{id}, u, u^2, \dots, u^{n^2})$, qui compte $n^2 + 1$ éléments, est liée. Comme $\mathbb{K}[X]$ est principal, il existe un unique polynôme unitaire μ_u tel que $I_u = \mu_u \mathbb{K}[X]$: c'est le **polynôme minimal** de u , polynôme annulateur unitaire de plus petit degré.
- b. Si $x \in \ker P(u)$, alors $P(u)(u(x)) = u(P(u)(x)) = u(0) = 0$, car u commute avec toute puissance de u , donc avec $P(u)$. Ainsi $u(x) \in \ker P(u)$: **$\ker P(u)$ est stable par u** . Par ailleurs, l'application $P \rightarrow P(u)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$, car $u^i \circ u^j = u^{i+j}$. Donc $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ et, puisque $PQ = QP$, on obtient aussi $(PQ)(u) = Q(u) \circ P(u)$.

c. **Énoncé.** Si P et Q sont premiers entre eux, alors

$$\ker (PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u).$$

Démonstration. D'après le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$. On en déduit $U(u) \circ P(u) + V(u) \circ Q(u) = \text{id}_E$.

D'abord, l'inclusion $\ker P(u) + \ker Q(u) \subset \ker (PQ)(u)$ vient de b : si $P(u)(x) = 0$, alors $(PQ)(u)(x) = Q(u)(P(u)(x)) = 0$, et de même pour Q .

Ensuite, la somme est directe. Si $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$, alors $x = U(u)(P(u)(x)) + V(u)(Q(u)(x)) = 0$.

Enfin, soit $x \in \ker (PQ)(u)$. On pose $y = V(u)(Q(u)(x))$ et $z = U(u)(P(u)(x))$, de sorte que $x = y + z$. Alors $P(u)(y) = V(u)((PQ)(u)(x)) = 0$, donc $y \in \ker P(u)$. De même $Q(u)(z) = U(u)((PQ)(u)(x)) = 0$, donc $z \in \ker Q(u)$. **Le lemme des noyaux est démontré.**

Barème : a) 0,5 point pour les définitions, 0,5 point pour l'existence ; b) 0,5 point pour la stabilité, 0,5 point pour le produit ; c) 0,5 point pour l'énoncé et Bézout, 0,5 point pour la somme directe, 1 point pour la décomposition $x = y + z$.

Exercice 2 : Un polynôme annulateur de degré 2 (4 points)

a. Par calcul direct, $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Chaque coefficient diagonal vaut $0 + 1 + 1 = 2$ et chaque coefficient non diagonal vaut 1 . Donc $A^2 = A + 2I_3$.

b. On a $A^2 - A = 2I_3$, donc $A \times \frac{1}{2}(A - I_3) = I_3$. Par conséquent, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.

c. Le polynôme $X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$ annule A . Le polynôme minimal μ_A le

divise, donc $\mu_A \in \left\{ X - 2, X + 1, (X - 2, 2)(X + 1) \right\}$. Or A n'est pas une matrice scalaire, donc μ_A n'est pas de degré 1. Ainsi $\mu_A = (X - 2)(X + 1)$. Ce polynôme est scindé à racines simples, donc A est **diagonalisable**, de spectre $\{-1, 2\}$.

- d. La division euclidienne s'écrit $X^n = (X^2 - X - 2)Q_n + a_n X + b_n$, car le reste est de degré au plus 1. On évalue en 2 et en -1, racines du diviseur :

$$2^n = 2a_n + b_n \text{ et } (-1)^n = -a_n + b_n.$$

Par soustraction, $a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$; puis $b_n = (-1)^n + a_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$.

En évaluant en A , le terme $(A^2 - A - 2I_3)Q_n(A)$ est nul, donc :

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3.$$

Vérification pour $n = 2$: $a_2 = 1$ et $b_2 = 2$, ce qui redonne bien $A^2 = A + 2I_3$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point, dont 0,5 point pour la justification de l'inversibilité ; c) 0,5 point pour le polynôme minimal, 0,5 point pour la diagonalisabilité justifiée ; d) 0,5 point pour la forme du reste, 0,5 point pour le système, 0,5 point pour la formule finale.

Exercice 3 : Endomorphismes nilpotents (4 points)

- a. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de N et $x \neq 0$ tel que $Nx = \lambda x$. Alors $N^p x = \lambda^p x = 0$, donc $\lambda^p = 0$ et $\lambda = 0$. Ainsi 0 est la **seule valeur propre** de N . Le polynôme χ_N est scindé sur $\mathbb{C}$, unitaire de degré n , et sa seule racine est 0, donc $\chi_N = X^n$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_N(N) = 0$, c'est-à-dire $N^n = 0$.

b. Si N est diagonalisable, il existe P inversible telle que $N = PDP^{-1}$ avec D diagonale. Les coefficients de D sont les valeurs propres de N , donc tous nuls d'après a. Ainsi $D = 0$ et $N = 0$. Autre argument : μ_N divise X^n et doit être à racines simples, donc $\mu_N = X$.

c. Les matrices I_n et N commutent, donc

$(I_n + N)(I_n - N + N^2) = I_n - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I_n + N^3 = I_n$. Par conséquent, $I_n + N$ est inversible, d'inverse $I_n - N + N^2$.

d. On écrit $M = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est triangulaire supérieure stricte, donc nilpotente avec $N^3 = 0$. On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. D'après c :

$$M^{-1} = I_3 - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & \\ 0 & 0 & 1,1 \end{pmatrix}.$$

Vérification sur la première ligne de MM^{-1} : $(1, -1 + 1, 1 - 3 + 2) = (1, 0, 0)$.

Erreur fréquente : affirmer que $N^n = 0$ sans passer par Cayley-Hamilton ou par le polynôme minimal. L'hypothèse donne seulement $N^p = 0$ pour un certain p , qui peut dépasser n .

Barème : a) 0,5 point pour la valeur propre, 1 point pour $N^n = 0$ avec Cayley-Hamilton cité ; b) 1 point ; c) 0,5 point ; d) 0,5 point pour N^2 , 0,5 point pour M^{-1} .

Exercice 4 : Trigonalisation et système différentiel (8 points)

Questions a à d : éléments propres

a. On calcule $\det(XI_3 - B)$, ou de façon équivalente $\det(B - XI_3) = -\chi_B(X)$. On

remplace d'abord la colonne C_3 par $C_3 + C_2$:

$$\det(B - XI_3) = \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 2 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} 3-X & 1 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix}.$$

Puis on remplace L_2 par $L_2 - L_3$, et on développe selon la dernière colonne :

$$\begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-X)(1-X) + 1 = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2.$$

Ainsi $\det(B - XI_3) = (1-X)(X-2)^2$, donc $\chi_B = (X-1)(X-2)^2$.

- b. Pour $\lambda = 2$, le système $(B - 2I_3)X = 0$ s'écrit $x + y - z = 0$, $x - z = 0$, $2x + y - 2z = 0$. La deuxième équation donne $z = x$, puis la première donne $y = 0$.
Donc $E_2(B) = \text{Vect}(1, 0, 1)$.

Pour $\lambda = 1$, le système $(B - I_3)X = 0$ s'écrit $2x + y - z = 0$, $x + y - z = 0$, $2x + y - z = 0$. La différence des deux premières équations donne $x = 0$, puis $y = z$.
Donc $E_1(B) = \text{Vect}(0, 1, 1)$.

- c. Le polynôme minimal divise χ_B et admet les mêmes racines, donc

$$\mu_B \in \left\{ (X-1)(X-2), (X-1)^2(X-2) \right\}. \text{ Or un calcul donne } (B - 2I_3)(B - I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0. \text{ Donc } \mu_B = (X-1)(X-2)^2. \text{ Ce}$$

polynôme n'est pas à racines simples, donc **B n'est pas diagonalisable**. On retrouve ce résultat avec les dimensions : $\dim E_2(B) = 1$ alors que la multiplicité de 2 vaut 2.

- d. On développe $\chi_B = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $B^3 - 5B^2 + 8B - 4I_3 = 0$, donc $B(B^2 - 5B + 8I_3) = 4I_3$. Par conséquent, **B est inversible et** $B^{-1} = \frac{1}{4}(B^2 - 5B + 8I_3)$. Avec $B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 3 & -3 & 7 \\ 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vérification sur la première ligne de $B B^{-1}$:

$$\frac{1}{4}(3 - 2 + 3, -3 + 2 + 1, 3 + 2 - 5) = (1, 0, 0).$$

Questions e et f : trigonalisation et système

- e. On cherche $v_2 = (x, y, z)$ tel que $(B - 2I_3)v_2 = (1, 0, 1)$: $x + y - z = 1$, $x - z = 0$, $2x + y - 2z = 1$. On obtient $z = x$ et $y = 1$. On choisit $v_2 = (0, 1, 0)$.

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, de colonnes v_1, v_2, v_3 , a pour déterminant $1 \times (1 - 0) = 1 \neq 0$. Donc (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

De plus $Bv_1 = 2v_1$, $Bv_2 = 2v_2 + v_1$ et $Bv_3 = v_3$, car $v_3 \in E_1(B)$. Par conséquent, $P^{-1}BP = T$. Enfin, d'après le lemme des noyaux appliqué à X_B :

$$\mathbb{R}^3 = \ker(B - 2I_3)^2 \oplus \ker(B - I_3), \text{ avec } \ker(B - 2I_3)^2 = \text{Vect}(v_1, v_2) \text{ et } \ker(B - I_3) = \text{Vect}(v_3).$$

- f. On pose $Y = P^{-1}X = (y_1, y_2, y_3)$. Comme P est constante, $Y' = P^{-1}BPY = TY$, ce qui donne le système triangulaire :

$$y_1' = 2y_1 + y_2, \quad y_2' = 2y_2, \quad y_3' = y_3.$$

La condition initiale s'écrit

$$X(0) = y_1(0)v_1 + y_2(0)v_2 + y_3(0)v_3 = (y_1(0), y_2(0) + y_3(0), y_1(0) + y_3(0)) = (1, 0, 0). \text{ Donc } y_1(0) = 1, \quad y_3(0) = -1 \text{ et } y_2(0) = 1.$$

Ensuite, on résout de bas en haut. On a $y_3(t) = -e^t$ et $y_2(t) = e^{2t}$. Puis

$$y_1' - 2y_1 = e^{2t}; \text{ en posant } y_1 = w e^{2t}, \text{ on trouve } w' = 1, \text{ donc } y_1(t) = (t + 1)e^{2t}.$$

Enfin $X = y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3$, d'où :

$$X(t) = \begin{pmatrix} (t+1)e^{2t} \\ e^{2t} - e^t \\ (t+1)e^{2t} - e^t \end{pmatrix}.$$

Vérification sur la première coordonnée : $x' = (2t+3)e^{2t}$ et

$3x + y - z = 3(t+1)e^{2t} + e^{2t} - e^t - (t+1)e^{2t} + e^t = (2t+3)e^{2t}$. **La solution est unique** d'après le théorème de Cauchy linéaire.

Barème : a) 1 point ; b) 0,5 point par sous-espace propre ; c) 0,5 point pour μ_B , 0,5 point pour la conclusion ; d) 0,5 point pour Cayley-Hamilton, 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour la matrice ; e) 0,5 point pour v_2 , 0,5 point pour la base et T , 0,5 point pour les sous-espaces caractéristiques ; f) 0,5 point pour le système triangulaire, 0,5 point pour les conditions initiales, 0,5 point pour y_1 , 0,5 point pour $X(t)$.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : polynômes d'endomorphismes et trigonalisation

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Trigonalisation et Cayley-Hamilton](#) » en [L2](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [trigonalisation et cayley-hamilton](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).