

Corrigé du contrôle de maths L2 : partiel de S4, séries entières et de Fourier

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : dérivation sous l'intégrale, Dirichlet et Parseval	3 points
Exercice 2 : Une série entière et sa somme	4 points
Exercice 3 : Intégrale de Gauss à paramètre et série entière	5 points
Exercice 4 : Problème : noyau de Poisson et intégrale de Poisson	8 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : dérivation sous l'intégrale, Dirichlet et Parseval (3 points)

a. **Théorème de dérivation sous le signe intégrale.** On suppose que :

- pour tout $x \in I$, la fonction $t \rightarrow f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;
- la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $I \times J$, elle est continue par rapport à x pour tout t , et continue par morceaux par rapport à t pour tout x ;

- (domination) il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J , telle que $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x, t) \in I \times J$.

Alors F est de classe C^1 sur I et $F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$. En pratique, il suffit que la domination ait lieu sur chaque segment de I .

- b. **Théorème de Dirichlet :** si g est 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux, alors sa série de Fourier converge en tout réel x , et

$$\frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(g)\cos(nx) + b_n(g)\sin(nx)) = \frac{g(x^+) + g(x^-)}{2}.$$

Formule de Parseval : si g est 2π -périodique et continue par morceaux, alors

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)^2 d\theta = \frac{a_0(g)^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(g)^2 + b_n(g)^2).$$

Barème : a) 0,5 point pour l'intégrabilité, 0,25 point pour la régularité de la dérivée partielle, 0,5 point pour la domination, 0,25 point pour la conclusion ; b) 0,75 point pour Dirichlet (hypothèse C^1 par morceaux et valeur de la limite), 0,75 point pour Parseval.

Exercice 2 : Une série entière et sa somme (4 points)

a. Posons $a_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0$. Alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2} \rightarrow 1$. **D'après la règle de d'Alembert, $R = 1$.**

b. On a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Pour $|x| < 1$, les séries $\sum \frac{x^n}{n}$ et $\sum \frac{x^n}{n+1}$ convergent (rayon 1), donc on peut séparer la somme. D'une part, $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$. D'autre part, pour $x \neq 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \frac{1}{x} (-\ln(1-x) - x).$$

Par conséquent, $S(x) = -\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + 1 = 1 + \ln(1-x)\left(\frac{1}{x} - 1\right)$. **Ainsi**
 $S(x) = 1 + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}$ **pour $x \in]-1, 1[$ non nul, et $S(0) = 0$.**

c. Pour $x \in [-1, 1]$, $\left| \frac{x^n}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n(n+1)}$, terme général d'une série convergente (équivalent à $\frac{1}{n^2}$). La série converge donc normalement sur $[-1, 1]$. Ses termes étant continus, **S est continu sur $[-1, 1]$** . En particulier, $S(-1)$ est la limite de $S(x)$ quand $x \rightarrow -1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{2\ln 2}{-1} = 1 - 2\ln 2.$$

La somme vaut $1 - 2\ln 2 \approx -0,386$. De même, $S(1) = 1$, car $(1-x)\ln(1-x) \rightarrow 0$, ce que confirme la somme télescopique.

d. On factorise : $1 + x - 2x^2 = (1-x)(1+2x)$, expression strictement positive au voisinage

de 0. Pour $|x| < \frac{1}{2}$,

$$\ln(1 + x - 2x^2) = \ln(1 - x) + \ln(1 + 2x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n - 1}{n} x^n.$$

Les deux séries ont des rayons différents, 1 et $\frac{1}{2}$; le rayon de la somme est donc le plus petit.
Le rayon de convergence vaut $\frac{1}{2}$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour la décomposition et la séparation justifiée, 1 point pour le calcul ; c) 0,5 point pour la convergence normale et la continuité, 0,5 point pour la valeur ; d) 0,5 point pour le développement, 0,5 point pour le rayon.

Exercice 3 : Intégrale de Gauss à paramètre et série entière (5 points)

- a. Posons $f(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$ sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. Pour tout x , $|f(x, t)| \leq e^{-t^2}$, fonction intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc F est définie sur $\mathbb{R}$.

Ensuite, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t e^{-t^2} \sin(xt)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, et l'on a la domination $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq t e^{-t^2}$. Cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$: son intégrale vaut $\left[-\frac{e^{-t^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$. D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, **F est de classe**

$$C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } F'(x) = -\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(xt) dt.$$

- b. Soit $A > 0$. On intègre par parties avec $u(t) = \sin(xt)$ et $v(t) = \frac{1}{2}e^{-t^2}$, de sorte que $v'(t) = -te^{-t^2}$:

$$-\int_0^A t e^{-t^2} \sin(xt) dt = \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^A - \frac{x}{2} \int_0^A e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

Le crochet vaut $\frac{1}{2}e^{-A^2}\sin(xA)$, qui tend vers 0. En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient $F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$.

Alors $\left(F(x)e^{x^2/4}\right)' = \left(F'(x) + \frac{x}{2}F(x)\right)e^{x^2/4} = 0$, donc $F(x)e^{x^2/4} = F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Ainsi $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2/4}$ **pour tout réel** x .

- c. **Calcul de** I_n . Chaque I_n converge, car $t^{2n}e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$. Pour $n \geq 1$, on intègre par parties avec $u = t^{2n-1}$ et $v = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$:

$$I_n = \left[-\frac{1}{2} t^{2n-1} e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} + \frac{2n-1}{2} \int_0^{+\infty} t^{2n-2} e^{-t^2} dt = \frac{2n-1}{2} I_{n-1}.$$

Montrons par récurrence que $I_n = \frac{(2n)!}{4^n n!} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. C'est vrai pour $n = 0$. Si c'est vrai au rang $n - 1$, le rapport des deux expressions vaut $\frac{(2n)(2n-1)}{4n} = \frac{2n-1}{2}$, ce qui correspond à la relation de récurrence. **La formule est donc vraie pour tout** n .

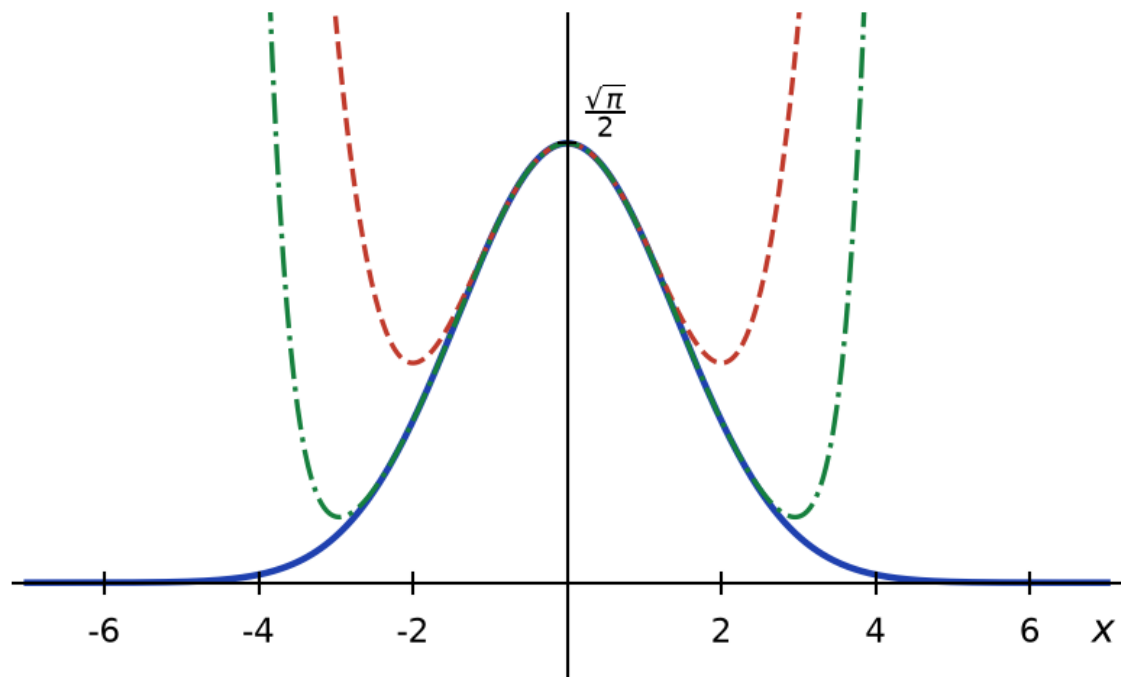
Intégration terme à terme. Pour $t \geq 0$, on pose $u_n(t) = \frac{(-1)^n x^{2n} t^{2n}}{(2n)!} e^{-t^2}$. Chaque u_n est continue et intégrable, et $\sum u_n(t) = e^{-t^2} \cos(xt)$, fonction continue. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2/4} < +\infty.$$

Le théorème admis s'applique donc, et

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n.$$

On retrouve $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$, et l'on obtient au passage le développement en série entière de F , de rayon infini.



- $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$
- - - somme partielle jusqu'à $n = 2$
- . - somme partielle jusqu'à $n = 6$

Barème : a) 0,5 point pour la définition, 0,5 point pour la domination, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,75 point pour l'intégration par parties et la limite, 0,75 point pour la résolution de l'équation différentielle ; c) 0,5 point pour la relation de récurrence, 0,5 point pour la formule de I_n , 0,5 point pour la vérification de la somme des intégrales, 0,5 point pour la conclusion.

Erreur fréquente : dériver sous l'intégrale sans hypothèse de domination indépendante de x ; ici, $t e^{-t^2}$ convient pour tous les x à la fois.

Exercice 4 : Problème : noyau de Poisson et intégrale de Poisson (8 points)

Partie A : une série de Fourier

- a. Pour tout réel θ , $|r^n \cos(n\theta)| \leq |r|^n$, terme général d'une série géométrique convergente, car $|r| < 1$. **La série converge normalement sur $\mathbb{R}$** . Ses termes sont continus, 2π -périodiques et pairs. Par conséquent, la somme f_r , limite uniforme, est continue, 2π -périodique et paire.
- b. Posons $z = r e^{i\theta}$, avec $|z| = |r| < 1$. Alors $D_r(\theta) = |1 - z|^2$, car $|1 - z|^2 = 1 - 2\operatorname{Re}(z) + |z|^2$. Comme $z \neq 1$, on a $D_r(\theta) > 0$. Ensuite, la série géométrique donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} = \frac{1 - \bar{z}}{|1 - z|^2} = \frac{1 - r e^{-i\theta}}{D_r(\theta)}.$$

En prenant les parties réelles, $f_r(\theta) = \frac{1 - r \cos \theta}{D_r(\theta)}$.

c. La convergence normale sur $[-\pi, \pi]$ permet d'intégrer terme à terme après multiplication par $\cos(n\theta)$, fonction bornée. Or $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\theta) \cos(n\theta) d\theta$ vaut 0 si $k \neq n$, 1 si $k = n \geq 1$ et 2 si $k = n = 0$. Donc $a_0(f_r) = 2$ et $a_n(f_r) = r^n$ pour $n \geq 1$. Enfin, f_r est paire, donc tous les b_n sont nuls.

Ainsi $a_0 = 2$, $a_n = r^n$ pour $n \geq 1$, et $b_n = 0$: la série qui définit f_r est sa série de Fourier.

d. On calcule $2f_r(\theta) - 1 = \frac{2 - 2r\cos\theta - (1 - 2r\cos\theta + r^2)}{D_r(\theta)} = \frac{1 - r^2}{D_r(\theta)}$. De plus,

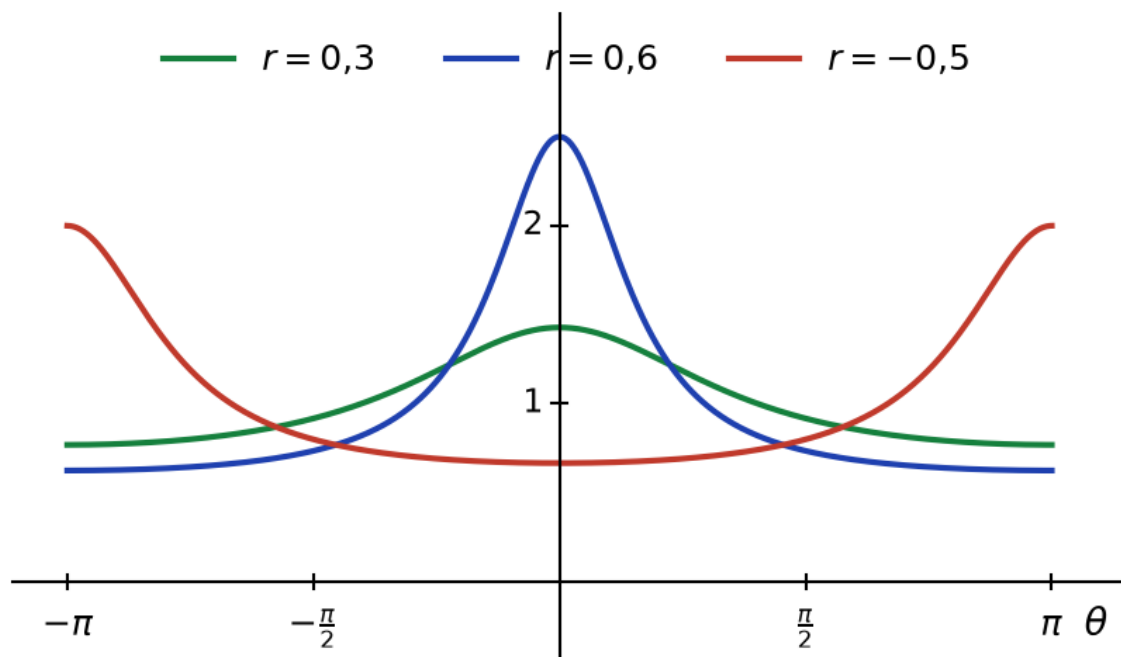
$$\int_{-\pi}^{\pi} f_r = \pi a_0 = 2\pi. \text{ Donc}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{D_r(\theta)} = \frac{1}{1 - r^2} \int_{-\pi}^{\pi} (2f_r(\theta) - 1) d\theta = \frac{4\pi - 2\pi}{1 - r^2} = \frac{2\pi}{1 - r^2}.$$

Ensuite, f_r est continue et 2π -périodique, donc la formule de Parseval s'applique :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_r^2 = \frac{2^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^{2n} = 2 + \frac{r^2}{1 - r^2} = \frac{2 - r^2}{1 - r^2}.$$

Ainsi $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{D_r(\theta)} = \frac{2\pi}{1 - r^2}$ et $\int_{-\pi}^{\pi} f_r(\theta)^2 d\theta = \frac{\pi(2 - r^2)}{1 - r^2}.$



Partie B : une intégrale à paramètre

- e. Par l'inégalité triangulaire, $|1 - re^{i\theta}| \geq 1 - |r| > 0$, donc $D_r(\theta) \geq (1 - |r|)^2 > 0$. La fonction $g(r, \theta) = \ln D_r(\theta)$ est donc définie et continue sur $] -1, 1[\times [0, \pi]$, et $P(r)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

De plus, $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{2(r - \cos\theta)}{D_r(\theta)}$ est continue. Soit $a \in]0, 1[$. Pour $|r| \leq a$, on a la domination $\left| \frac{\partial g}{\partial r} \right| \leq \frac{4}{(1-a)^2}$, constante intégrable sur $[0, \pi]$. Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, P est C^1 sur $[-a, a]$ pour tout $a < 1$. **Donc P est de classe C^1 sur $] -1, 1[$, avec $P'(r) = \int_0^\pi \frac{2(r - \cos\theta)}{D_r(\theta)} d\theta$.**

- f. On a $r(r - \cos\theta) = r^2 - r\cos\theta = D_r(\theta) - (1 - r\cos\theta)$. En divisant par $rD_r(\theta)$, on obtient $\frac{r - \cos\theta}{D_r(\theta)} = \frac{1 - f_r(\theta)}{r}$. Ensuite, f_r est paire, donc $\int_0^\pi f_r = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi f_r = \pi$. Par

conséquent, pour $r \neq 0$,

$$P'(r) = \frac{2}{r} \int_0^{\pi} (1 - f_r(\theta)) d\theta = \frac{2}{r}(\pi - \pi) = 0.$$

Par continuité de P' , on a aussi $P'(0) = 0$; d'ailleurs, $P'(0) = -2 \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = 0$.

La fonction P est donc constante sur l'intervalle $] -1, 1[$, égale à $P(0) = \int_0^{\pi} \ln 1 d\theta = 0$

. **Ainsi** $P(r) = 0$ **pour tout** $r \in] -1, 1[$.

g. Fixons θ et posons $\psi(r) = \ln D_r(\theta)$ pour $r \in] -1, 1[$. D'après f) et la définition de f_r ,

$$\psi'(r) = \frac{2(1 - f_r(\theta))}{r} = -\frac{2}{r} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} \cos(n\theta),$$

égalité encore vraie en $r = 0$, où les deux membres valent $-2\cos\theta$. C'est une série entière en r de rayon au moins 1. On l'intègre terme à terme sur $[0, r]$, avec $\psi(0) = 0$:

$$\ln D_r(\theta) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(n\theta)}{n}.$$

Enfin, à r fixé, cette série de fonctions de θ converge normalement sur $[0, \pi]$, car son terme général est majoré par $\frac{|r|^n}{n}$. On peut donc l'intégrer terme à terme. Or $\int_0^{\pi} \cos(n\theta) d\theta = 0$

pour $n \geq 1$. **On retrouve** $P(r) = 0$. Au passage, les coefficients de Fourier de $\theta \rightarrow \ln D_r(\theta)$ sont $a_0 = 0$ et $a_n = -\frac{2r^n}{n}$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour la positivité de D , 0,5 point pour la somme ; c) 0,5 point pour la justification de l'intégration terme à terme, 0,5 point pour les coefficients ; d) 0,75 point pour l'intégrale de $1/D$, 0,75 point pour Parseval ; e) 0,5 point pour la minoration, 0,5 point pour la domination sur un segment, 0,5 point pour la conclusion ; f) 0,5 point pour l'identité, 0,5 point pour $P' = 0$, 0,5 point pour $P = 0$; g) 0,5 point pour le développement en série, 0,5 point pour l'intégration terme à terme.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : partiel de S4, séries entières et de Fourier

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Séries entières » en L2](#) et [« Intégrales à paramètre » en L2](#) et [« Séries de Fourier » en L2](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries entières](#), [intégrales à paramètre](#), [séries de fourier](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : séries entières et rayon de convergence](#)
- [Contrôle de maths L2 : intégrales dépendant d'un paramètre](#)
- [Contrôle de maths L2 : séries de Fourier et égalité de Parseval](#)