

Corrigé du contrôle de maths L2 : partiel de S3, fonctions de deux variables

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : compacité et bornes atteintes	3,5 points
Exercice 2 : Normes, limites et continuité	4 points
Exercice 3 : Dérivées directionnelles et différentiabilité	4 points
Exercice 4 : Points critiques et minimum global par compacité	3,5 points
Exercice 5 : Problème : extrema sur le disque unité fermé	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : compacité et bornes atteintes (3,5 points)

- a. **Majoration.** Supposons par l'absurde que f ne soit pas majorée sur K . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe alors $x_n \in K$ tel que $f(x_n) \geq n$. La suite (x_n) est bornée, car K l'est. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un point ℓ .

Comme K est fermé, la caractérisation séquentielle des fermés donne $\ell \in K$. Par continuité de f en ℓ , $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(\ell)$, ce qui contredit $f(x_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \rightarrow +\infty$. Donc f

est majorée.

Borne atteinte. Posons $M = \sup_K f$, qui est un réel. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $y_n \in K$ tel que $M - \frac{1}{n+1} \leq f(y_n) \leq M$. De même, on extrait $(y_{\psi(n)})$ convergeant vers $a \in K$. Par continuité, $f(a) = \lim f(y_{\psi(n)}) = M$.

En appliquant ce résultat à $-f$, on obtient la minoration et le minimum atteint. **Ainsi f est bornée sur K et atteint ses bornes.**

- b. La fonction $h : (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$ est polynomiale, donc continue. Soit (p_n) une suite de points de D convergeant vers p . Par continuité, $h(p_n) \rightarrow h(p)$, et le passage à la limite dans $h(p_n) \leq 1$ donne $h(p) \leq 1$. Donc $p \in D$: **D est fermé.** Il est borné, car $\|p\|_2 \leq 1$ pour tout $p \in D$. En dimension finie, **D est donc compact.**

Soit $p \in U$ et $r = 1 - \|p\|_2 > 0$. Pour q dans la boule ouverte $B(p, r)$, l'inégalité triangulaire donne $\|q\|_2 \leq \|p\|_2 + \|q - p\|_2 < \|p\|_2 + r = 1$. Ainsi $B(p, r) \subset U$. **Donc U est ouvert.**

Barème : a) 1 point pour la majoration (Bolzano-Weierstrass et fermeture citées), 0,5 point pour la borne atteinte, 0,5 point pour le minimum ; b) 0,75 point pour la compacité, 0,75 point pour l'ouverture.

Exercice 2 : Normes, limites et continuité (4 points)

- a. Notons $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$. D'abord, $N(u) \geq 0$.

Séparation. Si $N(u) = 0$, alors $x = 0$ et $x + y = 0$, donc $y = 0$.

Homogénéité. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda u) = \max(|\lambda||x|, |\lambda||x+y|) = |\lambda| N(u)$.

Inégalité triangulaire. On a $|x + x'| \leq |x| + |x'| \leq N(u) + N(u')$. De même, $|(x + y) + (x' + y')| \leq |x+y| + |x'+y'| \leq N(u) + N(u')$. En prenant le maximum, $N(u + u') \leq N(u) + N(u')$. **Donc N est une norme.**

- b. D'une part, $|x| \leq \|u\|_\infty$ et $|x+y| \leq |x| + |y| \leq 2\|u\|_\infty$, donc $N(u) \leq 2\|u\|_\infty$. D'autre part, $|x| \leq N(u)$ et $|y| = |(x+y) - x| \leq 2N(u)$, donc $\|u\|_\infty \leq 2N(u)$.

Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes, comme toutes les normes de $\mathbb{R}^2$. Elles définissent donc les mêmes ouverts et les mêmes suites convergentes.

- c. Pour $t \neq 0$, $f(t, 0) = 0$, qui tend vers 0. En revanche, le long de la parabole $y = x^2$:

$$f(t, t^2) = \frac{t^4}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}.$$

Les deux restrictions ont des limites différentes en $(0,0)$. **Donc f n'a pas de limite en $(0,0)$.**

- d. On a $2|xy| \leq x^2 + y^2$. Donc, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|g(x,y)| \leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}|(x,y)|_2$. Ce majorant tend vers 0. **Ainsi g est continue en $(0,0)$.**

Erreur fréquente : conclure à l'existence d'une limite en ne testant que les droites passant par l'origine. Ici, f tend vers 0 le long de toute droite, mais pas le long de la parabole.

Barème : a) 0,5 point pour la séparation et l'homogénéité, 1 point pour l'inégalité triangulaire ; b) 0,75 point pour les deux inégalités, 0,25 point pour la conclusion ; c) 1 point (0,5 par chemin) ; d) 0,5 point.

Exercice 3 : Dérivées directionnelles et différentiabilité (4 points)

a. Le singleton $\{(0,0)\}$ est fermé : toute suite constante égale à $(0,0)$ converge vers $(0,0)$. Son complémentaire Ω est donc ouvert. Sur Ω , f est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. **Ses dérivées partielles existent et sont continues sur Ω : f est de classe C^1 sur Ω .**

b. On a $|x^3 + y^3| \leq |x|^3 + |y|^3 \leq |(x,y)|_\infty (x^2 + y^2)$. Donc $|f(x,y)| \leq |(x,y)|_\infty$, qui tend vers 0. **Ainsi f est continue en $(0,0)$.**

c. Pour $t \neq 0$:

$$\frac{f(ta, tb) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3(a^3 + b^3)}{t \cdot t^2(a^2 + b^2)} = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}.$$

Ce quotient est constant, donc il a une limite quand $t \rightarrow 0$. **La dérivée de f en $(0,0)$ selon v vaut $D_v f(0,0) = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$.**

d. Raisonnons par l'absurde. Si f était différentiable en $(0,0)$, on aurait $D_v f(0,0) = df(0,0)(v)$ pour tout v . L'application $v \rightarrow D_v f(0,0)$ serait donc linéaire.

Or c) donne $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{(1,0)} f(0,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$. La linéarité imposerait $D_{(1,1)} f(0,0) = 1 + 1 = 2$. Cependant, la formule de c) donne $D_{(1,1)} f(0,0) = \frac{2}{2} = 1$.

C'est une contradiction : f n'est pas différentiable en $(0,0)$, bien qu'elle y soit continue et

admette des dérivées dans toutes les directions.

Barème : a) 0,5 point pour l'ouvert, 0,5 point pour la classe C^1 ; b) 0,5 point ; c) 1 point ; d) 0,5 point pour la linéarité de la dérivée directionnelle, 0,5 point pour les dérivées partielles, 0,5 point pour la contradiction.

Exercice 4 : Points critiques et minimum global par compacité **(3,5 points)**

- a. La fonction f est polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x$. Un point critique vérifie $y = x^3$ et $x = y^3$, donc $x = x^9$.

Ainsi $x(x^8 - 1) = 0$, d'où $x \in \{-1, 0, 1\}$, puis $y = x^3 = x$. **Les points critiques sont $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$.**

- b. On a $r = 12x^2$, $s = -4$ et $t = 12y^2$.

En $(0,0)$: $rt - s^2 = -16 < 0$. **Le point $(0,0)$ est un point col.**

En $(1,1)$ et $(-1,-1)$: $rt - s^2 = 144 - 16 = 128 > 0$ et $r = 12 > 0$. **Ce sont deux minima locaux stricts, où f vaut $1 + 1 - 4 = -2$.**

- c. D'une part, $(x^2 - y^2)^2 \geq 0$ donne $x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} = \frac{\rho^4}{2}$. D'autre part, $4|xy| \leq 2(x^2 + y^2) = 2\rho^2$. **Donc** $f(x,y) \geq \frac{\rho^4}{2} - 2\rho^2 = \frac{\rho^2(\rho^2 - 4)}{2}$. En particulier, $f \geq 0$ dès que $\rho \geq 2$.

Soit B le disque fermé de centre O et de rayon 2 . Il est fermé et borné, donc compact, et f y est continue. Elle atteint donc sur B un minimum m en un point p . Comme $(1,1) \in B$, on a $m \leq -2 < 0$.

Le point p n'est pas sur le cercle de rayon 2 , où $f \geq 0$. Il est donc dans le disque ouvert, qui est un ouvert : p est un point critique. Parmi les valeurs $f(0,0) = 0$ et $f(\pm 1, \pm 1) = -2$, on obtient $m = -2$. Enfin, hors de B , $f \geq 0 > -2$.

Ainsi f admet sur $\mathbb{R}^2$ un minimum global égal à -2 , atteint en $(1,1)$ et en $(-1,-1)$.

Barème : a) 0,5 point pour le système, 0,5 point pour sa résolution ; b) 0,5 point pour la hessienne, 0,5 point pour la classification ; c) 0,5 point pour la minoration, 0,5 point pour la compacité et le point intérieur, 0,5 point pour la conclusion globale.

Exercice 5 : Problème : extrema sur le disque unité fermé (5 points)

- a. L'ensemble U est ouvert (exercice 1) et inclus dans D , donc U est inclus dans l'intérieur de D . Soit maintenant $p \in C$. La suite $p_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)p$ converge vers p , et $|p_n|_2 = 1 + \frac{1}{n} > 1$: aucune boule centrée en p n'est incluse dans D . Donc p n'est pas intérieur. **L'intérieur de D est U .**

Comme D est fermé, son adhérence est D . Par conséquent, sa frontière est $D \setminus U$. **La frontière de D est donc le cercle C .**

- b. La fonction f est polynomiale, donc continue, et D est compact. **D'après le théorème des bornes atteintes, f admet un minimum et un maximum sur D .**

- c. On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y$. Le seul point critique est $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, qui appartient bien à U . En ce point, $r = 2$, $s = 0$ et $t = 4$, donc $rt - s^2 = 8 > 0$ avec $r > 0$.

C'est un minimum local strict, où f vaut $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

- d. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons $\varphi(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta + 2\sin^2\theta - \cos\theta$. Comme $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, on obtient $\varphi(\theta) = 2 - \cos^2\theta - \cos\theta$.

Posons $c = \cos\theta$, qui décrit $[-1, 1]$, et $\psi(c) = 2 - c - c^2$. Alors $\psi'(c) = -1 - 2c$. Ainsi ψ croît sur $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ et décroît sur $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

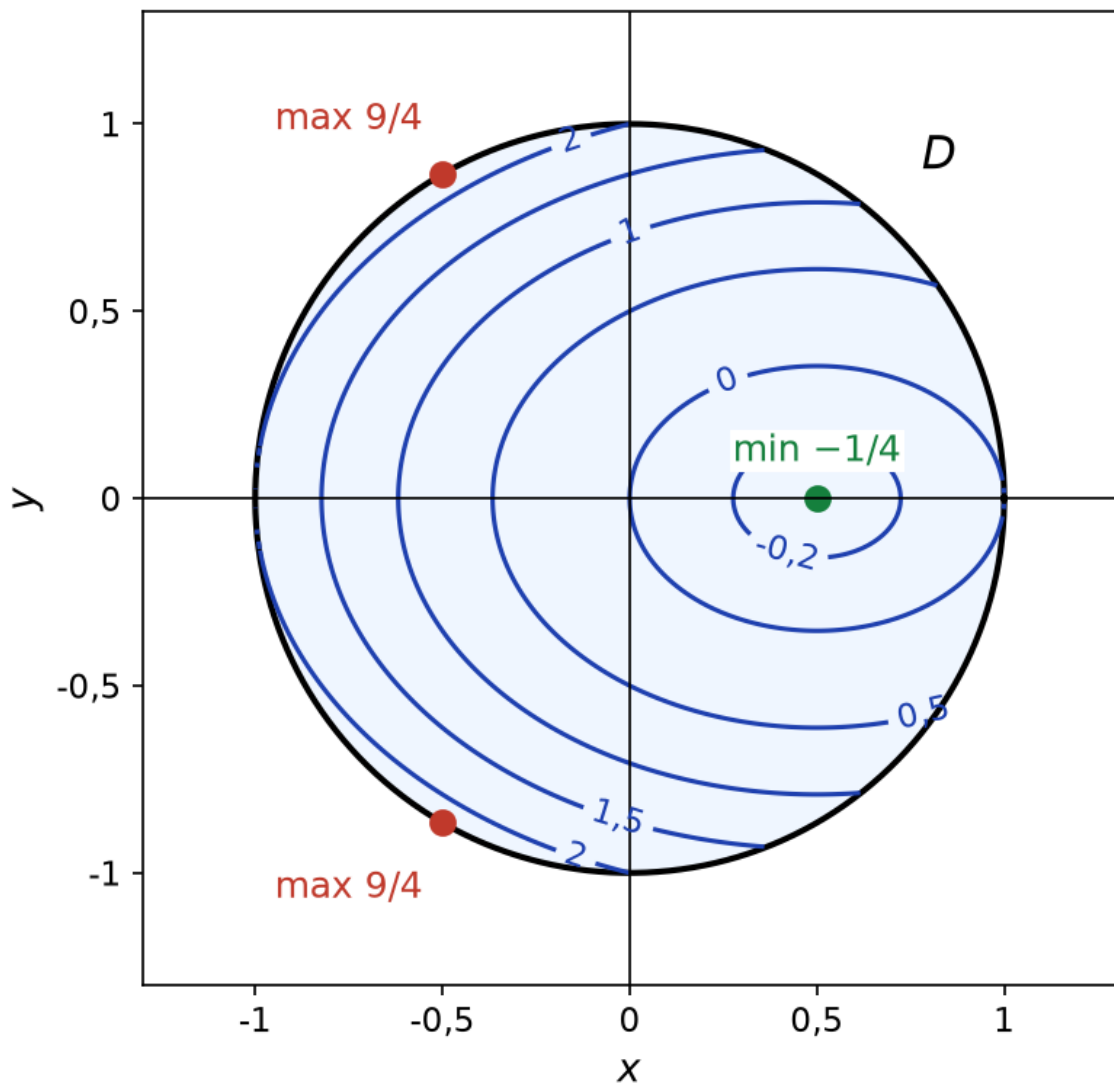
$$\psi(-1) = 2, \quad \psi\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}, \quad \psi(1) = 0.$$

Sur C , le maximum de f vaut $\frac{9}{4}$, atteint pour $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire aux points $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Le minimum vaut 0 , atteint au point $(1, 0)$.

- e. Un extremum de f sur D est atteint soit dans l'ouvert U , où c'est alors un point critique, soit sur la frontière C . Les seules valeurs candidates sont donc $-\frac{1}{4}$ (point critique) et les valeurs de f sur C , comprises entre 0 et $\frac{9}{4}$.

Le minimum de f sur D vaut $-\frac{1}{4}$, atteint en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Le maximum vaut $\frac{9}{4}$, atteint en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vérification : $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$. La figure est cohérente : les lignes de niveau entourent le minimum, et les valeurs croissent vers la gauche, jusqu'au bord.



Barème : a) 0,5 point pour l'intérieur, 0,5 point pour la frontière ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point pour le point critique, 0,5 point pour la nature ; d) 0,5 point pour φ , 0,5 point pour les variations de ψ , 0,5 point pour les extrema sur C ; e) 0,5 point pour la méthode, 0,5 point pour les résultats.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : partiel de S3, fonctions de deux variables

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Topologie de \$\mathbb{R}^n\$](#) » en L2 et « [Fonctions de plusieurs variables](#) » en L2 et « [Différentielle et extrema](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [topologie de \$\mathbb{R}^n\$](#) , [fonctions de plusieurs variables](#), [différentielle et extrema](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : normes et topologie de \$\mathbb{R}^n\$](#)
- [Contrôle de maths L2 : limites et dérivées partielles](#)
- [Contrôle de maths L2 : différentiabilité, Taylor et extrema](#)