

Corrigé du contrôle de maths L2 : normes et topologie de $\mathbb{R}^n$

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : normes usuelles de $\mathbb{R}^n$	4 points
Exercice 2 : Une norme non usuelle du plan	4 points
Exercice 3 : Une partie compacte définie par des inégalités	5 points
Exercice 4 : Adhérence d'une partie dénombrable	3 points
Exercice 5 : Problème : distance à un fermé	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : normes usuelles de $\mathbb{R}^n$ (4 points)

- a. Une **norme** sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie trois propriétés. D'abord la **séparation** : $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Ensuite l'**homogénéité** : $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Enfin l'**inégalité triangulaire** : $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.
- b. Les deux applications sont à valeurs positives. Pour $n=1$, si $\sum |x_i| = 0$, une somme de réels positifs est nulle, donc chaque x_i est nul. Ensuite $|\lambda x|_1 = \sum |\lambda x_i| = |\lambda| |x|_1$. Enfin, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ donne $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$; on somme sur i .

Pour $\|\cdot\|_\infty$, si $\max |x_i| = 0$, alors tous les $|x_i|$ sont nuls. L'homogénéité vient de $\max(|\lambda| |x_i|) = |\lambda| \max |x_i|$. Enfin, pour tout i , $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$; on passe au maximum sur i . **Ce sont donc deux normes.**

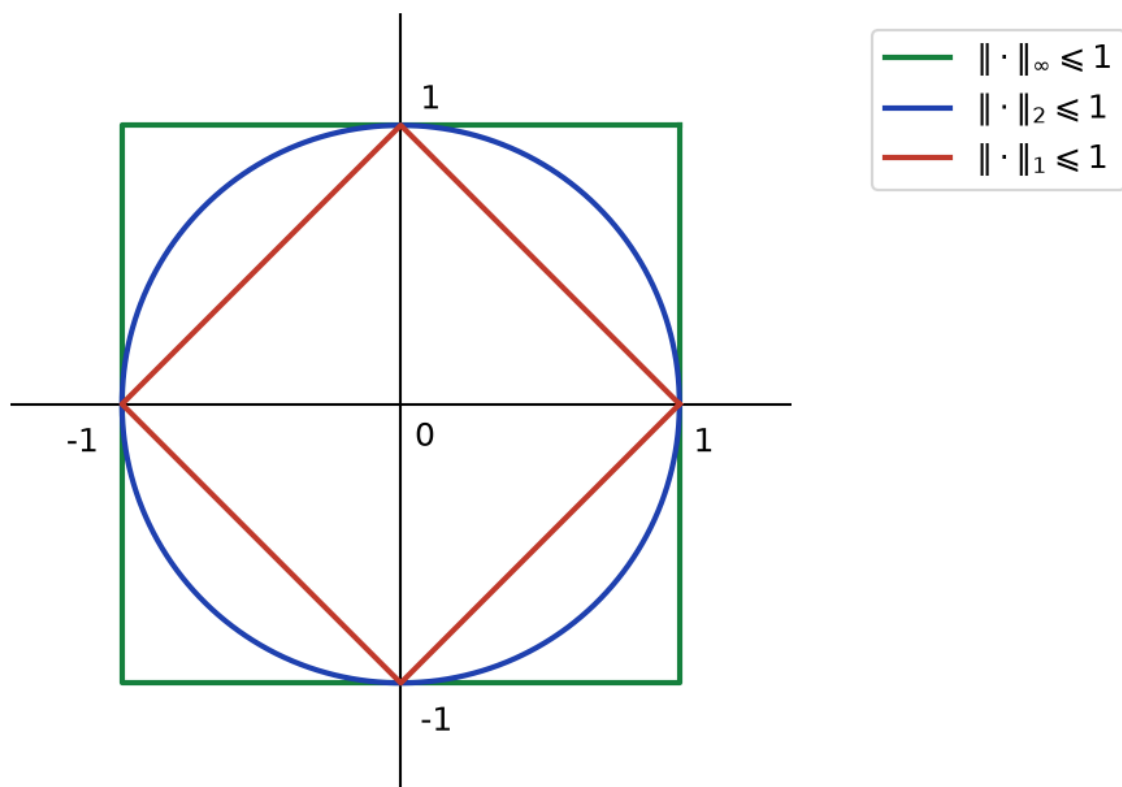
c. Soit i_0 un indice tel que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$. Alors $\|x\|_\infty^2 = x_{i_0}^2 \leq \sum x_i^2 = \|x\|_2^2$, d'où $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

Ensuite, en développant, $\|x\|_1^2 = \sum x_i^2 + \sum_{i \neq j} |x_i| |x_j| \geq \|x\|_2^2$, donc $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

Enfin, chaque $|x_i|$ est majoré par $\|x\|_\infty$, donc $\|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$.

Par conséquent, ces trois normes sont **deux à deux équivalentes** : elles définissent les mêmes ouverts, les mêmes parties bornées et les mêmes suites convergentes. C'est un cas particulier du théorème d'équivalence des normes en dimension finie.

d. Dans $\mathbb{R}^2$, la boule de $\|\cdot\|_1$ est le losange de sommets $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$. Celle de $\|\cdot\|_2$ est le disque unité, et celle de $\|\cdot\|_\infty$ est le carré $[-1, 1]^2$.



L'inégalité $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ se lit sur la figure : $B_1 \subset B_2 \subset B_\infty$. Plus une norme est grande, plus sa boule unité est petite.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point par norme ; c) 0,5 point pour les deux premières inégalités, 0,5 point pour la dernière, 0,5 point pour la conclusion ; d) 0,5 point pour la figure, 0,5 point pour les inclusions.

Exercice 2 : Une norme non usuelle du plan (4 points)

- a. L'application N est à valeurs positives. Si $N(x, y) = 0$, alors $x = 0$ et $x + y = 0$, donc $y = 0$: c'est la **séparation**. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,
 $N(\lambda u) = \max(|\lambda x|, |\lambda(x + y)|) = |\lambda| N(u)$.

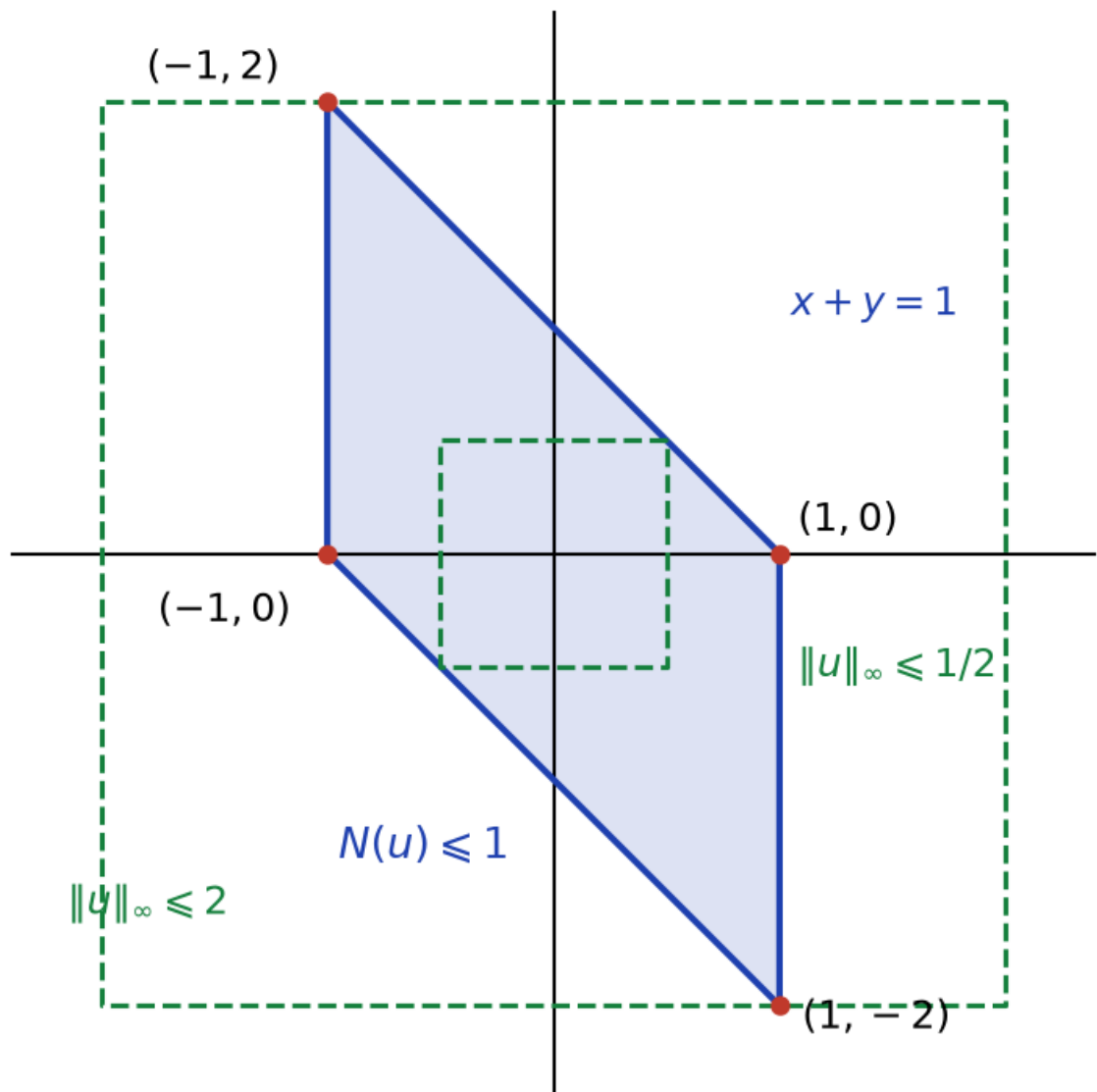
Soit $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$. On a $|x + x'| \leq |x| + |x'| \leq N(u) + N(u')$. De même, $|(x + x') + (y + y')| \leq |x + y| + |x' + y'| \leq N(u) + N(u')$. En prenant le maximum, $N(u + u') \leq N(u) + N(u')$. **Donc N est une norme.**

- b. D'une part, $|x + y| \leq |x| + |y| \leq 2\|u\|_\infty$ et $|x| \leq \|u\|_\infty$, donc $N(u) \leq 2\|u\|_\infty$.

D'autre part, $|x| \leq N(u)$ et $|y| = |(x + y) - x| \leq |x + y| + |x| \leq 2N(u)$. Donc $\|u\|_\infty \leq 2N(u)$, soit $\frac{1}{2}\|u\|_\infty \leq N(u)$.

Ces constantes sont optimales. En effet, pour $u = (1, 1)$, $N(u) = 2 = 2\|u\|_\infty$. De même, pour $u = (1, -2)$, $N(u) = \max(1, 1) = 1$ et $\|u\|_\infty = 2$, donc $N(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\infty$. **Les deux inégalités sont atteintes.**

- c. La boule unité fermée est $\{|x| \leq 1\} \cap \{-1 \leq x + y \leq 1\}$: c'est l'intersection d'une bande verticale et d'une bande oblique. On obtient le **parallélogramme de sommets** $(1, 0)$, $(1, -2)$, $(-1, 0)$ et $(-1, 2)$.



La figure confirme b : la boule de N contient le carré $\|u\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ et elle est contenue dans le carré $\|u\|_\infty \leq 2$. Les sommets $(1, -2)$ et $(-1, 2)$ touchent le grand carré ; les points $\pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ touchent le petit.

Barème : a) 0,5 point pour séparation et homogénéité, 1 point pour l'inégalité triangulaire ; b) 0,5 point par inégalité, 0,5 point pour l'optimalité ; c) 0,5 point pour la description, 0,5 point pour la figure et les sommets.

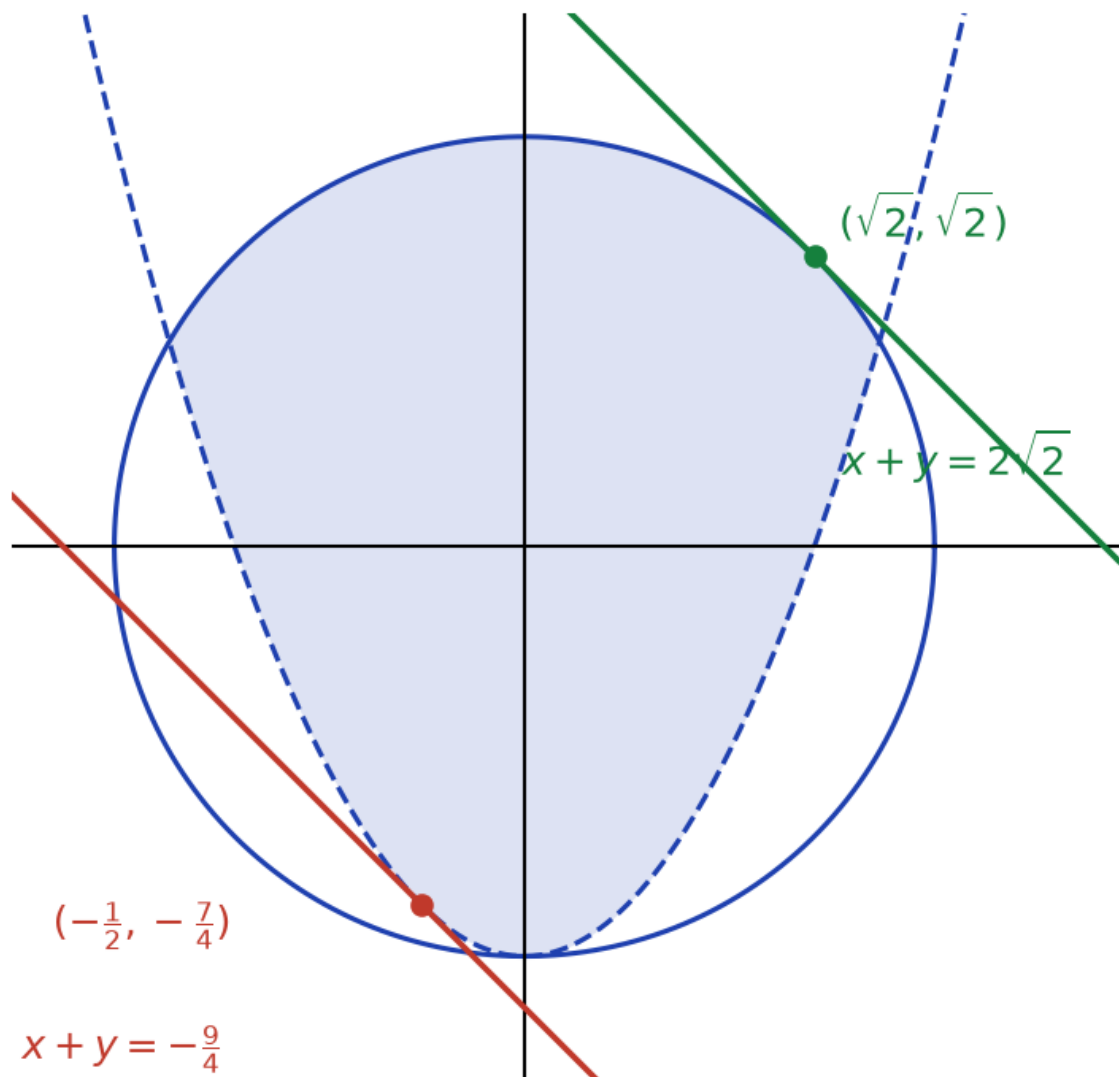
Exercice 3 : Une partie compacte définie par des inégalités (5 points)

- a. Les applications $g : (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$ et $h : (x, y) \rightarrow y - x^2$ sont polynomiales, donc continues sur $\mathbb{R}^2$. Or $A = g^{-1}(]-\infty, 4]) \cap h^{-1}([-2, +\infty[)$. Les intervalles $]-\infty, 4]$ et $[-2, +\infty[$ sont fermés dans $\mathbb{R}$. L'image réciproque d'un fermé par une application continue est fermée, et une intersection de fermés est fermée. **Donc A est fermée.**
- b. Tout point de A vérifie $\|(x, y)\|_2 \leq 2$, donc A est bornée. En dimension finie, les compacts sont exactement les parties fermées et bornées, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. **Donc A est compacte.**
- c. La fonction f est linéaire, donc continue. Par le **théorème des bornes atteintes**, elle est bornée sur le compact non vide A et y atteint son maximum et son minimum.

Maximum. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $x + y \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\sqrt{2}$. Le point $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ vérifie $x^2 + y^2 = 4$ et $y = \sqrt{2} \geq 0 = x^2 - 2$, donc il est dans A . Ainsi $\max_A f = 2\sqrt{2}$.

Minimum. Sur A , on a $y \geq x^2 - 2$, donc

$x + y \geq x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4}$. Le point $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ est sur la parabole, et $\frac{1}{4} + \frac{49}{16} = \frac{53}{16} \leq 4$, donc il est dans A . En ce point, $f = -\frac{9}{4}$. Ainsi $\min_A f = -\frac{9}{4}$.



Sur la figure, les deux droites de niveau extrêmes de f touchent A sans la traverser.

- d. On a $U = g^{-1}(]-\infty, 4[) \cap h^{-1}(]-2, +\infty[)$. C'est une intersection finie d'images réciproques d'ouverts par des applications continues, donc U **est ouvert**. De plus $U \subset A$. Or l'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A . Par conséquent, $U \subset \text{int}(A)$.

Erreur fréquente : affirmer qu'une partie définie par des inégalités larges est fermée sans citer la continuité des fonctions qui la définissent.

Barème : a) 0,5 point pour la continuité, 1 point pour l'écriture en images réciproques ; b) 0,5 point pour le caractère borné, 0,5 point pour la compacité justifiée ; c) 0,5 point pour l'existence, 0,5 point par

extremum avec un point de A ; d) 0,5 point pour l'ouvert, 0,5 point pour l'inclusion dans l'intérieur.

Exercice 4 : Adhérence d'une partie dénombrable (3 points)

a. Pour tout $n \geq 1$, $\left\| \left(\frac{1}{n}, (-1)^n \right) \right\|_{\infty} = 1$, donc D est bornée. La suite $u_k = \left(\frac{1}{2k}, 1 \right)$ est à valeurs dans D et converge vers $(0, 1)$. Or $(0, 1) \notin D$, car la première coordonnée d'un point de D n'est jamais nulle. D'après la caractérisation séquentielle des fermés, D n'est pas fermée.

b. Soit $p = \left(\frac{1}{n}, (-1)^n \right) \in D$ et $r > 0$. Pour $0 < t < \min(r, 1)$, le point $\left(\frac{1}{n}, (-1)^n + t \right)$ est dans la boule $B(p, r)$. Mais sa deuxième coordonnée n'est pas égale à ± 1 , donc il n'appartient pas à D . Aucune boule centrée en un point de D n'est incluse dans D : l'intérieur de D est vide.

c. **Inclusion** $\supset$. On a $D \subset \overline{D}$. De plus, $(0, 1)$ est limite de $\left(\frac{1}{2k}, 1 \right)$ et $(0, -1)$ est limite de $\left(\frac{1}{2k+1}, -1 \right)$, suites d'éléments de D .

Inclusion $\subset$. Soit $\ell \in \overline{D}$, limite d'une suite $\left(\frac{1}{n_k}, (-1)^{n_k} \right)$ d'éléments de D .

Si la suite d'entiers (n_k) est bornée, elle prend une valeur m une infinité de fois. La sous-suite correspondante est constante, égale à $\left(\frac{1}{m}, (-1)^m \right)$, donc $\ell \in D$.

Sinon, on extrait une sous-suite telle que $n_k \rightarrow +\infty$. La première coordonnée tend vers 0. La deuxième converge et prend ses valeurs dans le fermé $\{-1, 1\}$, donc sa limite vaut ± 1 . Ainsi $\ell \in \{(0, 1), (0, -1)\}$.

Donc $\overline{D} = D \cup \{(0, 1), (0, -1)\}$.

Barème : a) 0,5 point pour le caractère borné, 0,5 point pour le contre-exemple ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point

pour l'inclusion directe, 1 point pour la disjonction des cas.

Exercice 5 : Problème : distance à un fermé (4 points)

- a. Pour tout $b \in F$, l'inégalité triangulaire donne $d(a, F) \leq |a - b|_2 \leq |a - a'|_2 + |a' - b|_2$. En passant à la borne inférieure sur $b \in F$, on obtient $d(a, F) \leq |a - a'|_2 + d(a', F)$. En échangeant les rôles de a et a' , on conclut que $|d(a, F) - d(a', F)| \leq |a - a'|_2$. L'application $a \rightarrow d(a, F)$ est donc 1-lipschitzienne, et en particulier **continue**.

- b. On choisit $b_1 \in F$ et on pose $r = |a - b_1|_2$, puis $K = F \cap \overline{B}(a, r)$. Cette partie est non vide, car elle contient b_1 . Elle est fermée, comme intersection de deux fermés, et bornée. C'est donc un compact de $\mathbb{R}^n$.

L'application $b \rightarrow |a - b|_2$ est continue. Par le théorème des bornes atteintes, elle admet un minimum sur K en un point b_0 , et $|a - b_0|_2 \leq r$.

Soit $b \in F$. Si $b \in K$, alors $|a - b|_2 \geq |a - b_0|_2$. Si $b \notin K$, alors $|a - b|_2 > r \geq |a - b_0|_2$. Donc $|a - b_0|_2$ minore toutes les distances : $|a - b_0|_2 = d(a, F)$, et la distance est atteinte.

- c. L'ensemble H est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $(x, y) \rightarrow xy$: **H est fermé**. Pour $(x, y) \in H$, on a $x^2 + y^2 \geq 2|xy| = 2$, car $(|x| - |y|)^2 \geq 0$. Donc $|(x, y)|_2 \geq \sqrt{2}$. L'égalité a lieu si et seulement si $|x| = |y|$; avec $xy = 1$, cela donne $(1, 1)$ ou $(-1, -1)$. Ainsi $d(0, H) = \sqrt{2}$, atteinte en **deux points** $(1, 1)$ et $(-1, -1)$: le point réalisant la distance n'est pas unique en général.
- d. L'ensemble L est l'image réciproque de $\{0\}$ par $(x, y) \rightarrow y$, donc il est fermé. Les points de H vérifient $y \neq 0$, donc $L \cap H = \emptyset$. Enfin, pour $n \geq 1$, $(n, 0) \in L$ et $(n, \frac{1}{n}) \in H$ sont à distance $\frac{1}{n}$, qui tend vers 0. **La distance entre L et H est donc nulle**, bien que ces fermés soient disjoints. Cela ne peut pas arriver si l'un des deux fermés est compact.

Barème : a) 0,5 point pour l'inégalité, 0,5 point pour la continuité ; b) 0,5 point pour la compacité de K , 0,5 point pour le minimum, 0,5 point pour la comparaison hors de K ; c) 0,5 point pour la minoration,

0,5 point pour les points ; d) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : normes et topologie de $\mathbb{R}^n$

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Topologie de \$\mathbb{R}^n\$](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [topologie de \$\mathbb{R}^n\$](#) .

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : partiel de S3, fonctions de deux variables](#)