

Corrigé du contrôle de maths L2 : limites et dérivées partielles

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : dérivées partielles et continuité	3 points
Exercice 2 : Quatre limites en (0,0)	5 points
Exercice 3 : Gradient et règle de la chaîne	4 points
Exercice 4 : Problème : un contre-exemple au théorème de Schwarz	8 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : dérivées partielles et continuité (3 points)

- a. La **dérivée partielle** de f par rapport à x en a est, si elle existe, la limite finie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t} . \text{ De même,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t} . \text{ Le **gradient** est le vecteur}$$

$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$. Enfin, f est de **classe** C^1 sur U si ses deux dérivées partielles existent en tout point de U et sont continues sur U .

- b. **Théorème de Schwarz** : si f est de classe C^2 sur l'ouvert U , alors pour tout $a \in U$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) . \text{ Autrement dit, l'ordre des dérivations partielles n'importe pas.}$$

- c. Pour tout $t \neq 0$, $\varphi(t, 0) = 0$, donc $\frac{\varphi(t, 0) - \varphi(0, 0)}{t} = 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = 0$. De même, $\varphi(0, t) = 0$ donne $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0) = 0$. En revanche, $\varphi(t, t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$ pour $t \neq 0$. Or $(t, t) \rightarrow (0, 0)$ quand $t \rightarrow 0$, alors que $\varphi(t, t)$ reste égal à $\frac{1}{2} \neq \varphi(0, 0)$. Donc φ n'est pas continue en $(0, 0)$.

Barème : a) 0,5 point pour dérivées partielles et gradient, 0,5 point pour la classe C^1 ; b) 0,5 point pour l'hypothèse C^2 , 0,5 point pour la conclusion ; c) 0,5 point pour les dérivées partielles, 0,5 point pour la non-continuité.

Exercice 2 : Quatre limites en $(0,0)$ (5 points)

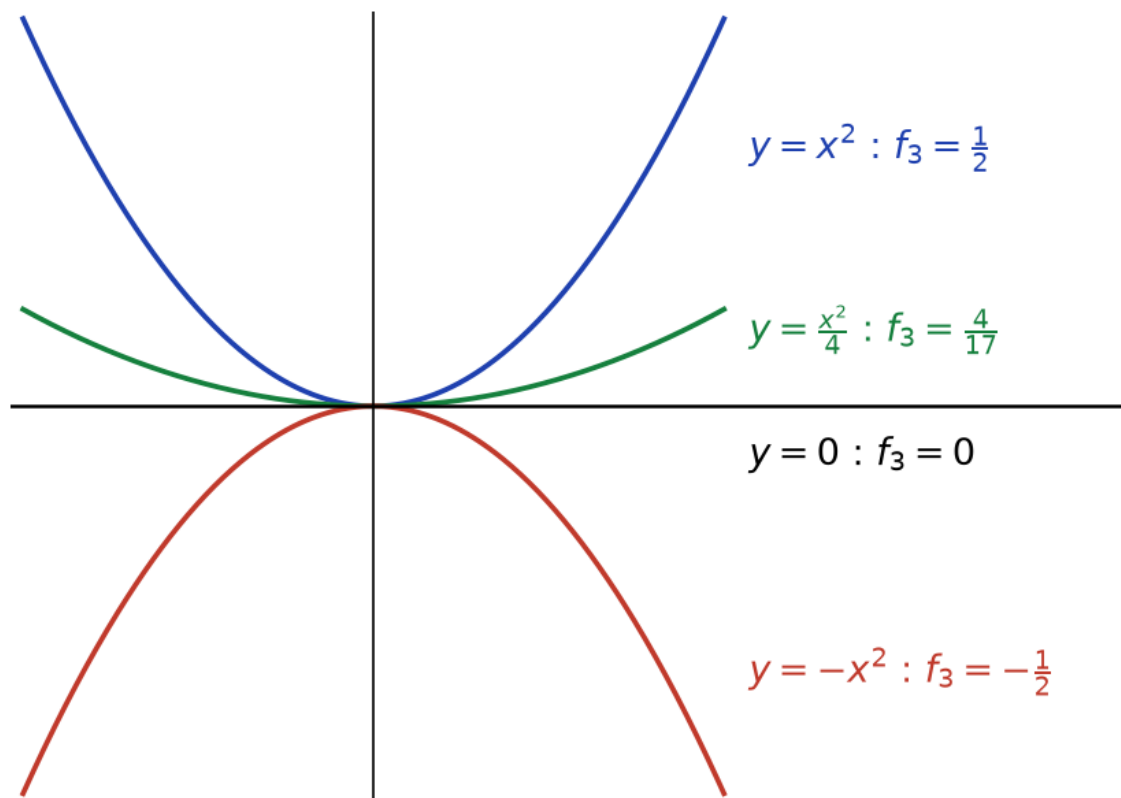
- a. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a $x^2 \leq x^2 + y^2$, donc $|f_1(x, y)| = \frac{x^2}{x^2 + y^2}|y| \leq |y|$. Or $|y| \leq |(x, y)|_2$ tend vers 0. Par encadrement, f_1 tend vers 0 en $(0, 0)$.

- b. La fonction f_2 est constante sur chaque demi-droite $y = mx$, $x \neq 0$, où elle vaut $\frac{1-m^2}{1+m^2}$. Sur l'axe des ordonnées, elle vaut -1 . En polaires, $f_2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$. Les lignes de niveau sont donc **des réunions de demi-droites issues de l'origine**, origine exclue. Par exemple, la ligne de niveau 0 est formée des deux bissectrices privées de 0.

Toutes ces lignes s'approchent de l'origine. Ainsi, au voisinage de $(0, 0)$, f_2 prend toutes les valeurs de $[-1, 1]$. Précisément, $f_2(t, 0) = 1$ et $f_2(0, t) = -1$ pour $t \neq 0$. Ces deux chemins tendent vers $(0, 0)$ avec des limites différentes. f_2 n'a pas de limite en $(0, 0)$.

- c. Sur l'axe $x = 0$, $f_3 = 0$. Sur la droite $y = mx$, avec $x \neq 0$, on obtient $f_3(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2}$. Cette quantité tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$, pour $m \neq 0$ comme pour $m = 0$. La restriction à **toute droite** passant par l'origine tend donc vers 0.

Pourtant, sur la parabole $y = x^2$, on a $f_3(x, x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$ pour $x \neq 0$. Plus généralement, f_3 vaut $\frac{m}{1+m^2}$ sur la parabole $y = mx^2$, comme le montre la figure.



Deux chemins aboutissant à l'origine donnent les limites 0 et $\frac{1}{2}$. f_3 **n'a pas de limite en** $(0, 0)$, bien que toutes ses restrictions aux droites tendent vers 0 .

- d. On écrit $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, avec $r > 0$. Alors $f_4 = r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)$, donc $|f_4(x, y)| \leq 2r$. Ce majorant ne dépend pas de θ et tend vers 0 quand $r = |(x, y)|_2 \rightarrow 0$. f_4 **tend vers 0 en** $(0, 0)$.

Erreur fréquente : conclure qu'une limite existe parce que les restrictions à toutes les droites ont la même limite. La fonction f_3 montre que c'est faux.

Barème : a) 0,5 point pour la majoration, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point pour les lignes de niveau, 1 point pour les deux chemins ; c) 0,5 point pour les droites, 0,5 point pour la parabole, 0,5 point pour la conclusion ; d) 0,5 point pour la majoration uniforme, 0,5 point pour la limite.

Exercice 3 : Gradient et règle de la chaîne (4 points)

- a. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on dérive à y fixé puis à x fixé :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = e^{xy} + xy e^{xy} = (1 + xy)e^{xy}, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = x^2 e^{xy} + \frac{2y}{1 + y^2}.$$

Ces deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^2$, comme produits, sommes, quotients à dénominateur non nul et composées de fonctions continues. **Donc h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.**

- b. On obtient $\frac{\partial h}{\partial x}(1, 0) = 1$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(1, 0) = 1$, donc $\nabla h(1, 0) = (1, 1)$. Comme h est de classe C^1 , la règle de la chaîne appliquée à $t \rightarrow h((1, 0) + tu)$ donne la dérivée selon u :
 $D_u h(1, 0) = \langle \nabla h(1, 0), u \rangle = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}$, soit $D_u h(1, 0) = \frac{7}{5}$.
- c. Les applications $(r, \theta) \rightarrow r \cos \theta$ et $(r, \theta) \rightarrow r \sin \theta$ sont de classe C^1 , et F aussi. La règle de la chaîne donne donc, avec les dérivées de F prises au point $(r \cos \theta, r \sin \theta)$:

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial F}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial F}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial F}{\partial y}.$$

- d. Avec $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, la deuxième formule s'écrit directement
 $\frac{\partial g}{\partial \theta} = x \frac{\partial F}{\partial y} - y \frac{\partial F}{\partial x}$. Si $x \frac{\partial F}{\partial y} = y \frac{\partial F}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$, alors $\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$. Pour r fixé, la fonction $\theta \rightarrow g(r, \theta)$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc elle est constante. Or elle décrit les valeurs de F sur le cercle de centre O et de rayon $|r|$. **F est donc constante sur chaque cercle de centre O** : c'est une fonction radiale.

Barème : a) 0,5 point pour les dérivées, 0,5 point pour la classe C^1 ; b) 0,5 point pour le gradient, 0,5 point pour la dérivée directionnelle ; c) 0,5 point par formule ; d) 0,5 point pour l'identité, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 4 : Problème : un contre-exemple au théorème de

Schwarz (8 points)

Questions a à d : la fonction est de classe C1

- a. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, donc elle est continue. En $(0, 0)$, on a $|x^2 - y^2| \leq x^2 + y^2$, donc $|f(x, y)| \leq |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Ce majorant tend vers 0. Ainsi $f(x, y) \rightarrow 0 = f(0, 0)$, et f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- b. On écrit $f = \frac{P}{Q}$ avec $P = x^3y - xy^3$ et $Q = x^2 + y^2$. Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3) 2x}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Le numérateur vaut

$$3x^4y + 3x^2y^3 - x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3 = x^4y + 4x^2y^3 - y^5. \text{ Il est égal à } y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4), \text{ ce qui donne la formule annoncée.}$$

Ensuite, $f(x, y) = -f(y, x)$. En dérivant par rapport à y , on obtient

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$. On échange donc x et y dans la formule précédente, puis on change le signe :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

- c. Pour $t \neq 0$, $f(t, 0) = 0$ et $f(0, t) = 0$. Les taux d'accroissement sont nuls, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

- d. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a $|x^4 + 4x^2y^2 - y^4| \leq x^4 + 4x^2y^2 + y^4 \leq 2(x^2 + y^2)^2$. En effet, $2(x^2 + y^2)^2 = 2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4$. Par conséquent, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leq 2|y|$. De même, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq 2|x|$.

Ces majorants tendent vers 0 en $(0, 0)$. Les dérivées partielles tendent donc vers 0, qui est

leur valeur en $(0, 0)$: elles sont continues en $(0, 0)$. Elles sont aussi continues ailleurs, comme fractions rationnelles. **Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.**

Questions e et f : les dérivées croisées

- e. Pour $y \neq 0$, la formule de b donne $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{y(-y^4)}{y^4} = -y$. C'est encore vrai pour $y = 0$, d'après c. Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$ pour tout réel y , et en dérivant en $y = 0$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1.$$

De même, pour $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \frac{x \cdot x^4}{x^4} = x$, ce qui reste vrai pour $x = 0$. Donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1.$$

- f. Les deux dérivées croisées existent en $(0, 0)$ mais sont différentes. Si f était de classe C^2 au voisinage de l'origine, le théorème de Schwarz imposerait leur égalité. Par conséquent, **f est de classe C^1 mais pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$** : ses dérivées secondes croisées ne sont pas continues en $(0, 0)$. L'hypothèse de régularité du théorème de Schwarz ne peut donc pas être supprimée.

Barème : a) 0,5 point hors de l'origine, 0,5 point pour la majoration en $(0, 0)$; b) 1 point pour $\partial f / \partial x$, 0,5 point pour la symétrie ; c) 1 point ; d) 0,5 point pour la majoration, 1 point pour la continuité des dérivées partielles ; e) 0,5 point par dérivée première restreinte, 0,5 point par dérivée croisée ; f) 1 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : limites et dérivées partielles

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Fonctions de plusieurs variables](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [fonctions de plusieurs variables](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : partiel de S3, fonctions de deux variables](#)