

Corrigé du contrôle de maths L2 : isométries et théorème spectral

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : endomorphismes symétriques et matrices orthogonales	4 points
Exercice 2 : Axe et angle d'une rotation	5 points
Exercice 3 : Matrice d'une réflexion	3 points
Exercice 4 : Problème : théorème spectral pour une matrice 3×3	8 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : endomorphismes symétriques et matrices orthogonales (4 points)

- a. Soit $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$. Comme u est symétrique, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$. Or $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$, d'où

$$\lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle, \text{ soit } (\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0.$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on obtient $\langle x, y \rangle = 0$. **Les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont donc orthogonaux.**

- b. **Théorème spectral.** Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable dans une base orthonormée : E est la somme directe orthogonale de ses sous-espaces propres.

Version matricielle : pour toute matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telles que $S = P D P^T = P D P^{-1}$.

- c. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M . Le coefficient d'indice (i, j) de $M^T M$ vaut $C_i^T C_j = \langle C_i, C_j \rangle$. Donc $M^T M = I_n$ équivaut à $\langle C_i, C_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tous i, j , c'est-à-dire : la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est orthonormée. Une famille orthonormée de n vecteurs est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

Dans ce cas, $1 = \det(I_n) = \det(M^T) \det(M) = (\det M)^2$. Donc $\det M = 1$ ou $\det M = -1$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la symétrie utilisée, 1 pour la conclusion ; b) 1 point (0,5 par version) ; c) 1,5 point : 1 pour l'équivalence, 0,5 pour le déterminant.

Exercice 2 : Axe et angle d'une rotation (5 points)

- a. Les colonnes de A sont $C_1 = \frac{1}{3}(2, 2, -1)$, $C_2 = \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$ et $C_3 = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$. On a

$$|C_1|^2 = |C_2|^2 = |C_3|^2 = \frac{4+4+1}{9} = 1,$$

$$\langle C_1, C_2 \rangle = \frac{-2+4-2}{9} = 0, \quad \langle C_1, C_3 \rangle = \frac{4-2-2}{9} = 0, \quad \langle C_2, C_3 \rangle = \frac{-2-2+4}{9} = 0.$$

Les colonnes forment une base orthonormée, donc A est orthogonale (exercice 1, c).

b. On développe le déterminant de la matrice entière $3A$ selon la première ligne :

$$\det(3A) = 2(4 + 2) + 1 \times (4 - 1) + 2(4 + 2) = 12 + 3 + 12 = 27.$$

Donc $\det A = \frac{27}{27} = 1$. **Une matrice orthogonale de déterminant 1 est dans $SO_3(\mathbb{R})$: A est la matrice d'une rotation r .**

c. L'axe est $\ker(A - I_3) = \ker(3A - 3I_3)$, avec

$$3A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

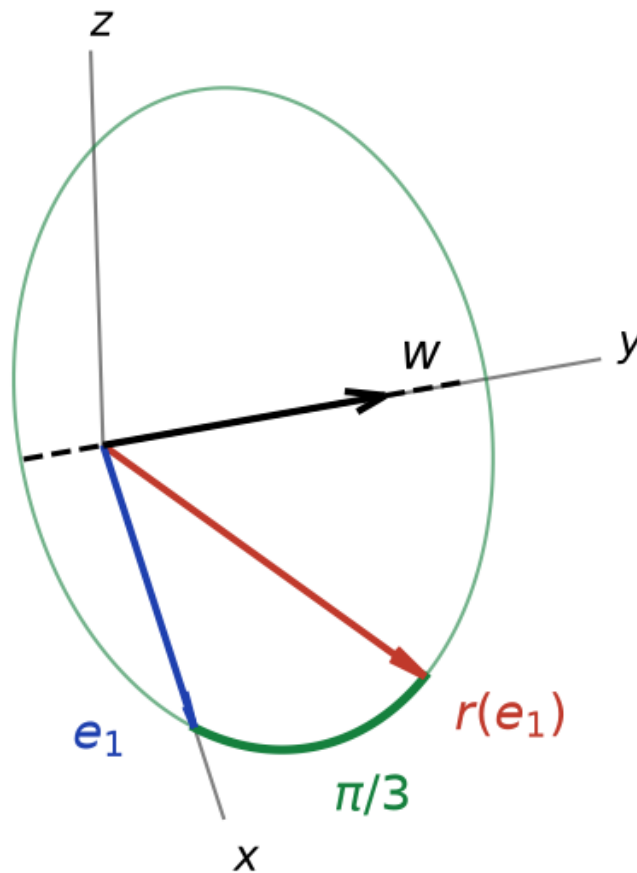
Le système s'écrit $-x - y + 2z = 0$ et $2x - y - z = 0$. La première équation donne $x = 2z - y$; en reportant, $4z - 2y - y - z = 0$, soit $y = z$, puis $x = z$. **L'axe de r est la droite $\text{Vect}(1, 1, 1)$.** (La matrice n'est pas l'identité, donc l'axe est bien une droite.)

d. La trace d'une rotation d'angle θ vaut $1 + 2\cos\theta$. Ici $\text{tr } A = \frac{2+2+2}{3} = 2$, donc $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$.

Pour le signe, on utilise un vecteur x hors de l'axe : $\det(w, x, r(x))$ a le signe de $\sin\theta$. Avec $x = e_1 = (1, 0, 0)$ et $r(e_1) = C_1 = \frac{1}{3}(2, 2, -1)$:

$$\det(w, e_1, r(e_1)) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0.$$

(On a développé selon la deuxième colonne.) Donc $\sin\theta > 0$. **La rotation r a pour axe $\text{Vect}(1, 1, 1)$, orienté par w , et pour angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.**



Vérification : la partie antisymétrique $\frac{1}{2}(A - A^T)$ doit valoir $\sin\theta$ fois la matrice du produit vectoriel par w . Ici $\frac{1}{2}(A - A^T)$ a pour coefficients $\pm \frac{1}{2}$, et $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$: c'est cohérent.

Barème : a) 1 point (normes 0,5, produits scalaires 0,5) ; b) 1 point : 0,5 pour le déterminant, 0,5 pour la conclusion ; c) 1 point ; d) 2 points : 0,5 pour la trace, 0,5 pour $\cos\theta$, 1 pour le signe de $\sin\theta$ par le produit mixte.

Erreur fréquente : donner $\theta = \frac{\pi}{3}$ sans préciser l'orientation de l'axe ; avec l'axe orienté par $-w$, l'angle serait $-\frac{\pi}{3}$.

Exercice 3 : Matrice d'une réflexion (3 points)

a. Le plan P est l'orthogonal de $n = (1, -2, 2)$, et $P^\perp = \text{Vect}(n)$. Tout x s'écrit

$$x = \left(x - \frac{\langle x, n \rangle}{|n|^2} n \right) + \frac{\langle x, n \rangle}{|n|^2} n,$$

où le premier terme est dans P (son produit scalaire avec n est nul) et le second dans $P^\perp$.
La réflexion s conserve la composante dans P et change le signe de la composante dans $P^\perp$, d'où $s(x) = x - \frac{2\langle x, n \rangle}{|n|^2} n$.

Matriciellement, $S = I_3 - \frac{2}{|n|^2} n n^T$ avec $|n|^2 = 9$ et

$$n n^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \text{ donc } S = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 8 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. La matrice S est visiblement symétrique. Comme $s \circ s = \text{id}$, on a $S^2 = I_3$, donc $S^T S = S^2 = I_3$: S est orthogonale. On peut le vérifier sur les colonnes : par exemple $\frac{49 + 16 + 16}{81} = 1$ et $\frac{28 + 4 - 32}{81} = 0$.

Dans une base formée de deux vecteurs de P et de n , la matrice de s est $\text{diag}(1, 1, -1)$.
Donc $\det S = -1$.

c. On a $\langle (1, 1, 1), n \rangle = 1 - 2 + 2 = 1$, donc

$$s(1, 1, 1) = (1, 1, 1) - \frac{2}{9}(1, -2, 2) = \left(\frac{7}{9}, \frac{13}{9}, \frac{5}{9} \right).$$

L'image de $(1, 1, 1)$ **est** $\frac{1}{9}(7, 13, 5)$, ce que confirme le produit $S \times (1, 1, 1)^T$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la décomposition, 1 pour la matrice ; b) 1 point : 0,5 pour l'orthogonalité, 0,5 pour le déterminant ; c) 0,5 point.

Exercice 4 : Problème : théorème spectral pour une matrice 3×3 (8 points)

- a. La matrice B est symétrique réelle. **D'après le théorème spectral, elle est diagonalisable dans une base orthonormée** : il existe P orthogonale et D diagonale telles que $B = P D P^T$.

- b. On calcule $B(1, 1, -2)^T = (5 - 1 - 4, -1 + 5 - 4, 2 + 2 - 4)^T = (0, 0, 0)^T$. Donc 0 est valeur propre de B et $(1, 1, -2) \in \ker B$.

Ensuite,

$$B - 0 I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

a trois lignes proportionnelles et non nulles : son rang vaut 1 . Par le théorème du rang, $\dim E_0(B) = 3 - 1 = 2$.

Comme $\dim E_0(B) + \dim E_6(B) \geq 1 + 2 = 3$, ces sous-espaces sont en somme directe et remplissent $\mathbb{R}^3$. **Le spectre de B est $\{0, 6\}$, avec $\dim E_0(B) = 1$ et $\dim E_6(B) = 2$.** Contrôle : $\text{tr } B = 12 = 0 + 6 + 6$.

- c. On norme le vecteur du noyau : $u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$. Le sous-espace $E_6(B)$ est le plan

d'équation $x + y - 2z = 0$, c'est-à-dire l'orthogonal de u_1 (conformément à l'exercice 1, a). On y choisit deux vecteurs orthogonaux : $(1, -1, 0)$ et $(1, 1, 1)$, qui vérifient l'équation et dont le produit scalaire est nul. On pose $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ et $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

La famille (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormée de vecteurs propres, et l'on peut prendre

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

- d. Décomposons $x = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$ dans la base orthonormée. Alors $Bx = 6\beta u_2 + 6\gamma u_3$, et

$$\langle Bx, x \rangle = 6(\beta^2 + \gamma^2) \geq 0.$$

L'égalité $\langle Bx, x \rangle = 0$ a lieu si et seulement si $\beta = \gamma = 0$, c'est-à-dire $x \in \text{Vect}(u_1) = \ker B$. **La matrice B est symétrique positive, mais pas définie positive** : par exemple $\langle B(1, 1, -2), (1, 1, -2) \rangle = 0$.

- e. On pose $R = P \text{diag}(0, \sqrt{6}, \sqrt{6}) P^T$. Cette matrice est symétrique, à valeurs propres 0 et $\sqrt{6}$ positives, et $R^2 = P \text{diag}(0, 6, 6) P^T = B$.

Pour l'exprimer simplement, on remarque que $P \text{diag}(0, 1, 1) P^T$ est la matrice Π de la projection orthogonale sur $E_6(B)$. Ainsi $B = 6 \Pi$ et $R = \sqrt{6} \Pi$. **Donc**
 $R = \frac{\sqrt{6}}{6} B = \frac{1}{\sqrt{6}} B$.

Vérification directe :

$$\Pi = I_3 - u_1 u_1^T = I_3 - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} B.$$

f. Comme $\Pi^2 = \Pi$, on a $B^k = 6^k \Pi^k = 6^k \Pi = 6^{k-1} B$. **Pour tout $k \geq 1$,**
 $B^k = 6^{k-1} B$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 2 points : 0,5 pour le noyau, 0,5 pour le rang, 1 pour le spectre et les dimensions justifiés ; c) 2 points : 1 pour la base orthonormée, 1 pour P et D ; d) 1,5 point : 1 pour la positivité, 0,5 pour le cas d'égalité et la conclusion ; e) 1,5 point : 0,5 pour la construction de R , 1 pour l'expression $\frac{1}{\sqrt{6}} B$ justifiée ; f) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : isométries et théorème spectral

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Isométries et théorème spectral](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [isométries et théorème spectral](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).