

Corrigé du contrôle de maths L2 : intégrales généralisées et intégrabilité

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours, les intégrales de Riemann	4 points
Exercice 2 : Nature et calcul de quatre intégrales	5 points
Exercice 3 : La fonction Gamma aux entiers	4 points
Exercice 4 : Problème, l'intégrale semi-convergente de $\sin(t)/t$	7 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours, les intégrales de Riemann (4 points)

a. La fonction $t \rightarrow t^{-\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Pour $x \geq 1$:

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$
$$, \text{ si } \alpha \neq 1, \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x.$$

Si $\alpha > 1$, $x^{1-\alpha} \rightarrow 0$ et l'intégrale tend vers $\frac{1}{\alpha-1}$. Si $\alpha < 1$, $x^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$; si $\alpha = 1$, $\ln x \rightarrow +\infty$. **L'intégrale converge si et seulement si $\alpha > 1$, et vaut alors $\frac{1}{\alpha-1}$.**

b. La fonction est continue sur $]0, 1]$. Pour $0 < \varepsilon \leq 1$:

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dt}{t^{\alpha}} = \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$, \text{ si } \alpha \neq 1, \int_{\varepsilon}^1 \frac{dt}{t} = -\ln \varepsilon.$$

Si $\alpha < 1$, $\varepsilon^{1-\alpha} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et l'intégrale tend vers $\frac{1}{1-\alpha}$. Si $\alpha > 1$, $\varepsilon^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$; si $\alpha = 1$, $-\ln \varepsilon \rightarrow +\infty$. **L'intégrale converge si et seulement si $\alpha < 1$, et vaut alors $\frac{1}{1-\alpha}$.**

c. **Théorème.** Soient f et g continues sur $[a, b[$, positives au voisinage de b , avec

$f(t) \sim g(t)$ quand $t \rightarrow b$. Alors les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour les primitives, 0,5 pour la discussion, 0,5 pour la valeur ; b) 1,5 point, même répartition ; c) 1 point (0,5 pour les hypothèses de positivité, 0,5 pour la conclusion).

Exercice 2 : Nature et calcul de quatre intégrales (5 points)

a. La fonction $g : t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$: l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$. En 0, $g(t) \sim \frac{1}{t^{1/2}}$, intégrable car $\frac{1}{2} < 1$. En $+\infty$, $g(t) \sim \frac{1}{t^{3/2}}$, intégrable car $\frac{3}{2} > 1$. Donc I converge. Ensuite, $u \rightarrow u^2$ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même. Avec $t = u^2$ et $dt = 2u du$:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2u \, du}{u(1+u^2)} = 2[\arctan u]_0^{+\infty} = 2 \times \frac{\pi}{2}.$$

Donc $I = \pi$.

- b. La fonction $t \rightarrow \frac{\ln t}{t^2}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, et $t^{3/2} \times \frac{\ln t}{t^2} = \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$.
Ainsi $\frac{\ln t}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$: J converge. Sur $[1, x]$, avec $u = \ln t$ et $v = -\frac{1}{t}$, fonctions de classe C^1 :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} \, dt = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{dt}{t^2} = -\frac{\ln x}{x} + 1 - \frac{1}{x}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient $J = 1$.

- c. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t \ln t}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$, de primitive $t \rightarrow \ln(\ln t)$.
Ainsi $\int_2^x \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \rightarrow +\infty$. **L'intégrale diverge** (intégrale de Bertrand limite).

- d. La fonction $h : t \rightarrow \frac{1 - \cos t}{t^{5/2}}$ est continue et positive sur $]0, 1]$. Comme $1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}$ en 0, on a $h(t) \sim \frac{1}{2t^{1/2}}$. L'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}}$ converge, donc par équivalence de fonctions positives, **l'intégrale converge**.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la convergence aux deux bornes, 0,5 pour le changement de variable justifié, 0,5 pour la valeur ; b) 1,5 point : 0,5 pour la convergence, 1 pour l'intégration par parties et la limite ; c) 1 point ; d) 1 point.

Exercice 3 : La fonction Gamma aux entiers (4 points)

- a. Soit $x > 0$. La fonction $\varphi : t \rightarrow t^{x-1} e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. En 0, $\varphi(t) \sim \frac{1}{t^{1-x}}$, intégrable sur $]0, 1]$ car $1 - x < 1$. En $+\infty$, $t^2 \varphi(t) = t^{x+1} e^{-t} \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, intégrable sur $[1, +\infty[$. **L'intégrale $\Gamma(x)$ converge pour tout $x > 0$.**

- b. Sur $[\varepsilon, A]$, on intègre par parties avec $u = t^x$ et $v = -e^{-t}$, de classe C^1 :

$$\int_{\varepsilon}^A t^x e^{-t} dt = \varepsilon^x e^{-\varepsilon} - A^x e^{-A} + x \int_{\varepsilon}^A t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon^x e^{-\varepsilon} \rightarrow 0$ car $x > 0$. Quand $A \rightarrow +\infty$, $A^x e^{-A} \rightarrow 0$. Les deux intégrales convergent d'après a). Le passage à la limite donne $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.

- c. On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{-A}) = 1 = 0!$. Supposons

$\Gamma(n+1) = n!$ pour un entier $n \geq 0$. Alors

$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1) \times n! = (n+1)!$. Par récurrence, $\Gamma(n+1) = n!$

pour tout $n \geq 0$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la continuité et la positivité, 0,5 par borne ; b) 1,5 point : 0,5 pour l'intégration par parties, 1 pour les deux limites ; c) 1 point : 0,5 pour $\Gamma(1)$, 0,5 pour la récurrence.

Exercice 4 : Problème, l'intégrale semi-convergente de $\sin(t)/t$ (7 points)

- a. Comme $\sin t \sim t$ en 0, $f(t) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow 0$. On prolonge f par $f(0) = 1$, et on obtient une fonction continue sur $[0, 1]$. **L'intégrale $\int_0^1 f$ est donc faussement impropre :**

elle converge.

b. Sur $[1, A]$, avec $u = \frac{1}{t}$ et $v = -\cos t$, de classe C^1 :

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \frac{\cos A}{A} - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

D'une part, $\left| \frac{\cos A}{A} \right| \leq \frac{1}{A} \rightarrow 0$. D'autre part, $\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$, intégrable sur $[1, +\infty[$:

l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est absolument convergente, donc convergente. Le membre de droite a

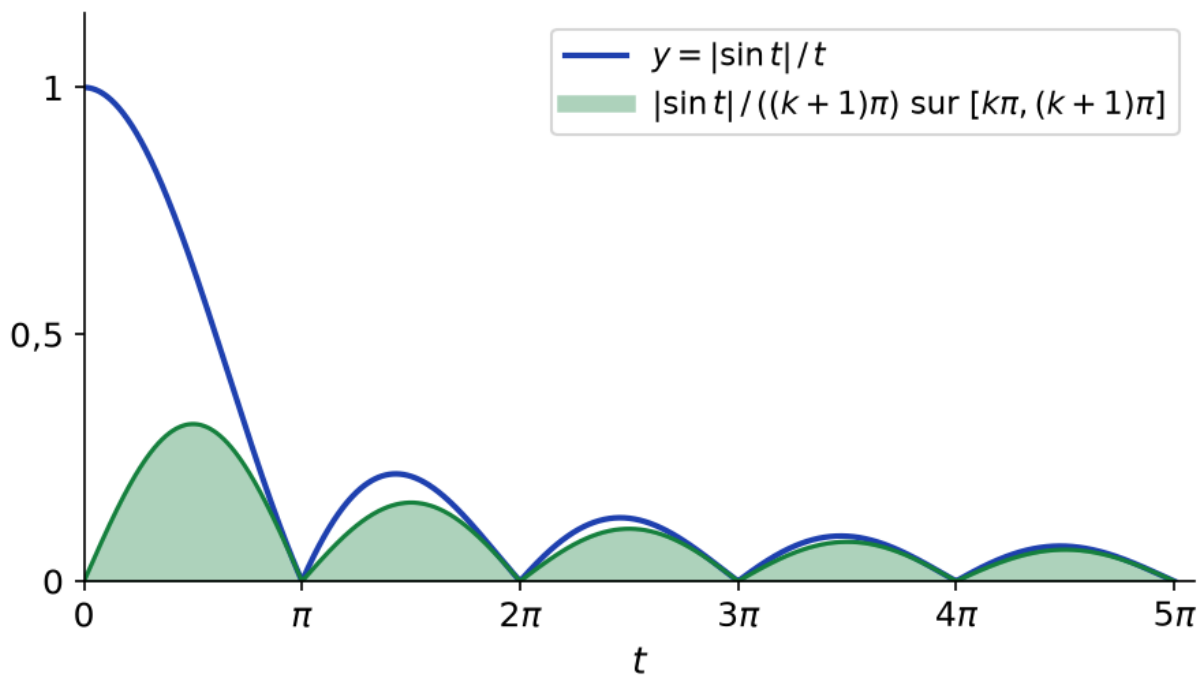
une limite finie. Avec a), $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ **converge**.

c. Pour $t \in]k\pi, (k+1)\pi]$, $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}$, et $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = 2$. Ainsi

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

En sommant pour k de 0 à $n-1$, $\int_0^{n\pi} |f| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Ce minorant tend vers $+\infty$, car la

série harmonique diverge. La fonction $x \rightarrow \int_0^x |f|$ est croissante et non majorée : f **n'est pas intégrable sur** $]0, +\infty[$. L'intégrale de f est donc semi-convergente.



- d. La fonction $g : t \rightarrow \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. En 0, $g(t) \rightarrow \frac{1}{2}$: elle se prolonge par continuité. En $+\infty$, $0 \leq g(t) \leq \frac{2}{t^2}$. **L'intégrale de g est absolument convergente.** Sur $[\varepsilon, A]$, on intègre par parties avec $u = 1 - \cos t$ et $v = -\frac{1}{t}$:

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon} - \frac{1 - \cos A}{A} + \int_{\varepsilon}^A \frac{\sin t}{t} dt.$$

Or $\frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon} \sim \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow 0$ et $0 \leq \frac{1 - \cos A}{A} \leq \frac{2}{A} \rightarrow 0$. Les deux intégrales convergent : à la limite, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$.

- e. On écrit $\frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{2 \sin^2(t/2)}{t^2}$. Le changement de variable $t = 2u$ est une bijection affine de $]0, +\infty[$ sur lui-même, avec $dt = 2 du$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2(t/2)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2 u}{4u^2} \times 2 du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du.$$

Avec d), $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du$. Cette dernière intégrale, de fonction positive, est absolument convergente. On peut montrer que leur valeur commune est $\frac{\pi}{2}$.

Erreur fréquente : intégrer par parties directement sur $]0, +\infty[$ sans vérifier que les termes entre crochets ont une limite finie aux deux bornes.

Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point : 0,5 pour l'intégration par parties, 0,5 pour la convergence absolue du reste, 0,5 pour la conclusion ; c) 1,5 point : 1 pour la minoration, 0,5 pour la divergence ; d) 1,5 point : 0,5 pour la convergence absolue, 0,5 pour l'intégration par parties, 0,5 pour les limites ; e) 1,5 point : 0,5 pour la formule de trigonométrie, 1 pour le changement de variable.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : intégrales généralisées et intégrabilité

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Intégrales généralisées » en L2](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégrales généralisées](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : comparaison série-intégrale et restes](#)