

Corrigé du contrôle de maths L2 : intégrales doubles, triples et curvilignes

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : Fubini et jacobiens	3 points
Exercice 2 : Théorème de Fubini sur des domaines élémentaires	4 points
Exercice 3 : Coordonnées polaires et intégrale de Gauss	4 points
Exercice 4 : Volumes et intégrales triples	4 points
Exercice 5 : Problème : formes différentielles et formule de Green-Riemann	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : Fubini et jacobiens (3 points)

a. **Théorème de Fubini** : si f est continue sur D , alors

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Si D s'écrit aussi $\left\{ \begin{array}{l} c \leq y \leq d, \\ \psi(y) \leq x \leq \psi_2(y) \end{array} \right\}$, on peut intégrer dans l'autre ordre, et les deux résultats sont égaux.

b. La matrice jacobienne de $(r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$ a pour colonnes $(\cos \theta, \sin \theta)$ et $(-r \sin \theta, r \cos \theta)$. Son déterminant vaut $r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta$. **Le jacobien vaut r** , d'où $dx dy = r dr d\theta$.

c. Les dérivées partielles de $\Phi(r, \theta, \varphi)$ sont

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \cos \varphi \sin \theta \\ -r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

On développe le déterminant selon la troisième ligne $(\cos \varphi, 0, -r \sin \varphi)$. Le mineur associé à $\cos \varphi$ vaut $-r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta - r^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta = -r^2 \sin \varphi \cos \varphi$. Celui associé à $-r \sin \varphi$ vaut $r \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r \sin^2 \varphi \sin^2 \theta = r \sin^2 \varphi$. Donc

$$\det J_{\Phi} = -r^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi - r^2 \sin^3 \varphi = -r^2 \sin \varphi.$$

La valeur absolue du jacobien vaut $r^2 \sin \varphi$ (positif car $\varphi \in [0, \pi]$), d'où $dx dy dz = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$.

Barème : a) 0,5 point pour les hypothèses, 0,5 point pour la formule ; b) 0,5 point ; c) 0,5 point pour la matrice jacobienne, 0,75 point pour le calcul du déterminant, 0,25 point pour la valeur absolue.

Exercice 2 : Théorème de Fubini sur des domaines élémentaires (4 points)

- a. Pour $0 \leq x \leq 1$, on a $x^2 \leq \sqrt{x}$, donc D est un domaine élémentaire. D'après Fubini appliqué à la fonction constante 1,

$$\mathcal{A}(D) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}.$$

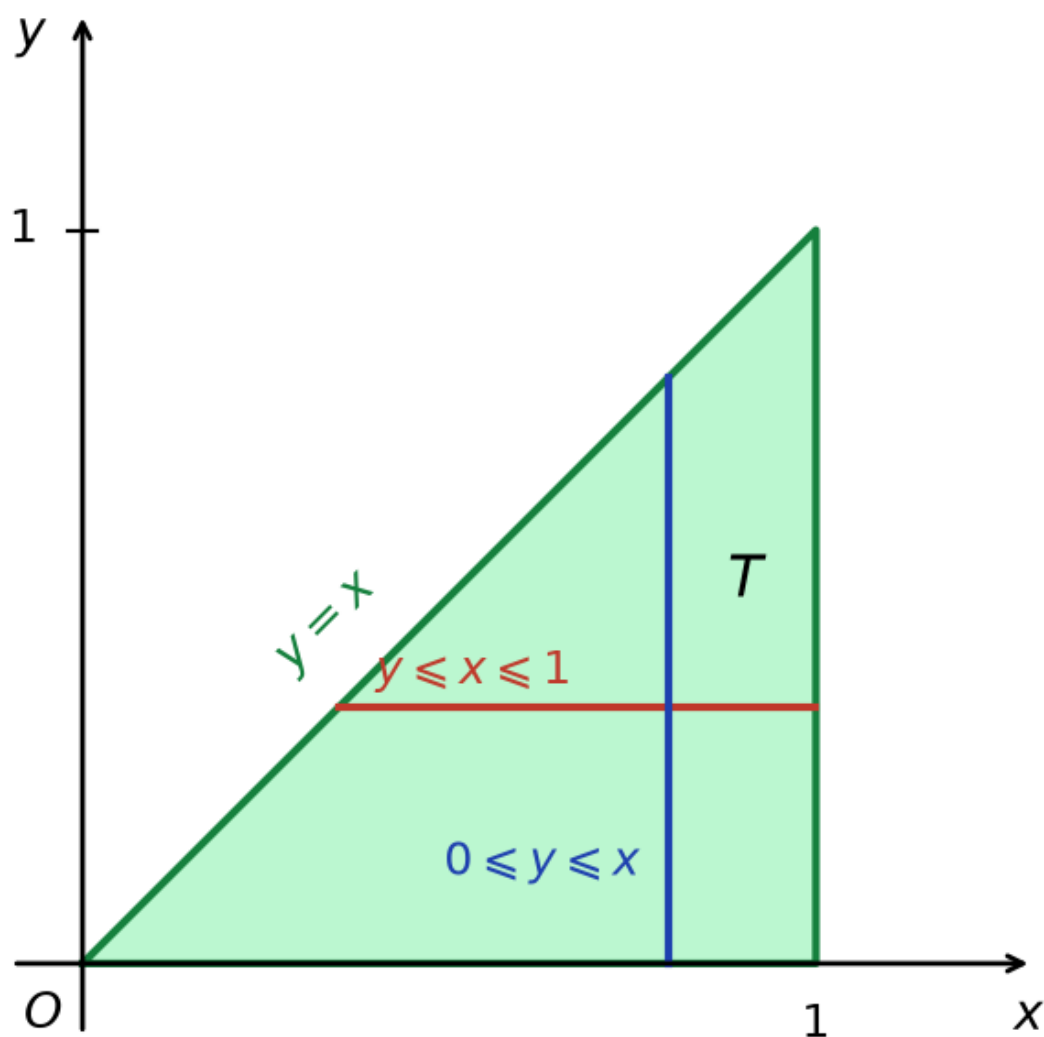
L'aire de D vaut $\frac{1}{3}$.

- b. La fonction $(x, y) \rightarrow xy$ est continue sur D . Par Fubini,

$$I = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(x - x^4) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right).$$

Ainsi $I = \frac{1}{12}$.

- c. Le domaine d'intégration est le triangle $T = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1, \\ y \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$, de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$. Il s'écrit aussi $T = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq x \end{array} \right\}$.



La fonction $(x, y) \rightarrow e^{x^2}$ est continue sur T . On peut donc échanger l'ordre des intégrations par Fubini. On n'a pas de primitive explicite de e^{x^2} , mais dans l'autre ordre :

$$J = \int_0^1 \left(\int_0^x dy \right) e^{x^2} dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1.$$

Par conséquent $J = \frac{e-1}{2}$.

Barème : a) 0,5 point pour la description, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour la mise en place, 1 point pour le calcul ; c) 0,5 point pour le domaine dessiné et décrit dans les deux ordres, 0,5 point pour la justification de l'échange, 0,5 point pour le résultat.

Erreur fréquente : garder les bornes y et 1 après l'échange ; les bornes de l'intégrale intérieure doivent toujours dépendre de la variable extérieure.

Exercice 3 : Coordonnées polaires et intégrale de Gauss (4 points)

- a. En polaires, Δ correspond à $1 \leq r \leq 2$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, car $0 \leq y \leq x$ équivaut à $0 \leq \sin\theta \leq \cos\theta$. Avec $dx dy = r dr d\theta$ et Fubini sur un rectangle :

$$\iint_{\Delta} x \, dx \, dy = \int_0^{\pi/4} \cos\theta \, d\theta \times \int_1^2 r^2 \, dr = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{7}{3}.$$

L'intégrale vaut $\frac{7\sqrt{2}}{6}$.

- b. La fonction $\frac{1}{x^2 + y^2}$ est continue sur Δ , qui ne contient pas l'origine. Donc

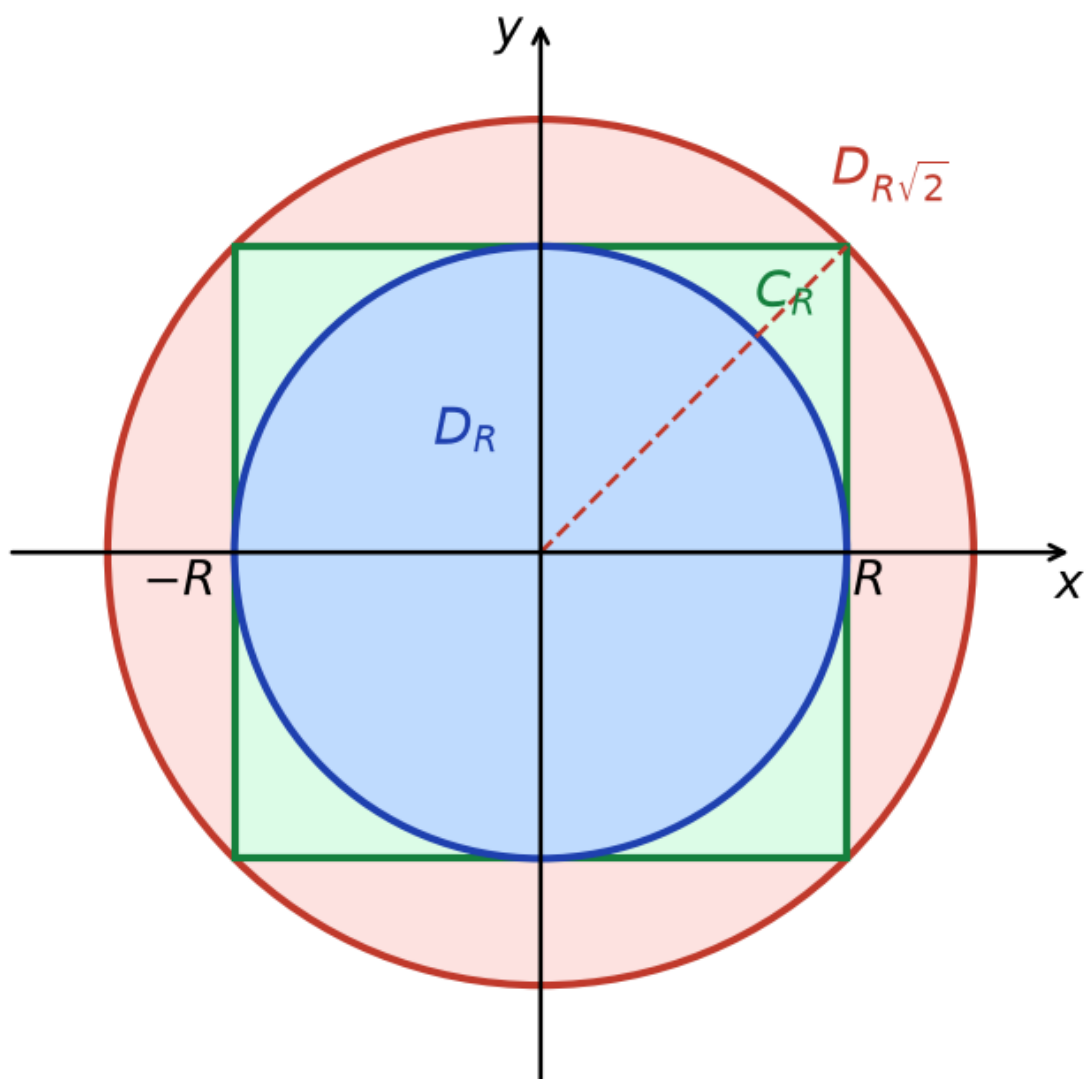
$$\iint_{\Delta} \frac{dx \, dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{\pi/4} d\theta \times \int_1^2 \frac{r}{r^2} \, dr = \frac{\pi}{4} \ln 2.$$

L'intégrale vaut $\frac{\pi \ln 2}{4}$.

c. D'abord, en polaires,

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2 + y^2)} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^R r e^{-r^2} \, dr = 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

Ensuite, on a les inclusions $D_R \subset C_R \subset D_{R\sqrt{2}}$, car un point du carré est à distance au plus $R\sqrt{2}$ de O .



La fonction intégrée est positive, donc les intégrales sont rangées dans le même ordre. De plus, par

Fubini sur le carré, $\iint_{C_R} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = G_R^2$, où $G_R = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$. Ainsi

$$\pi(1 - e^{-R^2}) \leq G_R^2 \leq \pi(1 - e^{-2R^2}).$$

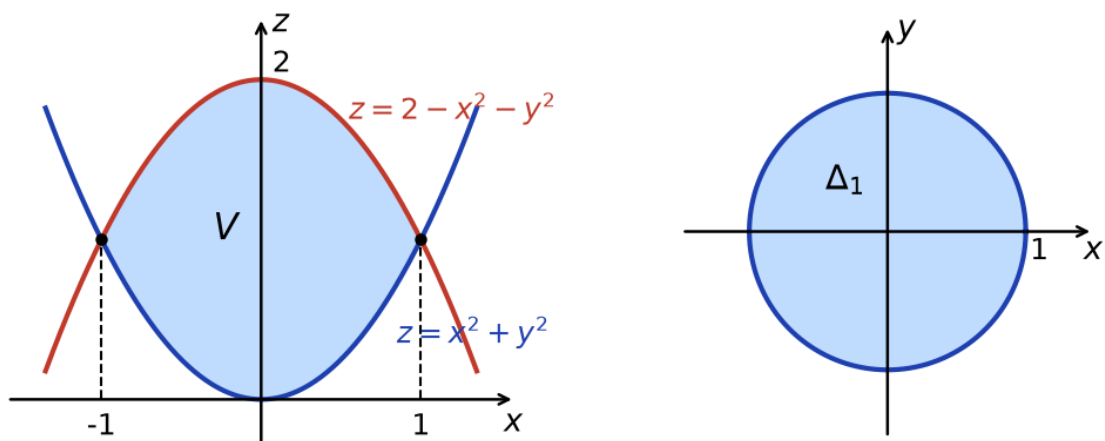
Par encadrement, $G_R^2 \rightarrow \pi$ quand $R \rightarrow +\infty$. Or G_R est positif et croissant, et

l'intégrale de Gauss converge car $e^{-x^2} \leq e^{-|x|}$ pour $|x| \geq 1$. **Donc** $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Barème : a) 0,5 point pour le domaine en polaires, 0,5 point pour le jacobien, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,25 point pour la continuité, 0,75 point pour le calcul ; c) 0,5 point pour l'intégrale sur le disque, 0,5 point pour l'encadrement justifié, 0,5 point pour le passage à la limite.

Exercice 4 : Volumes et intégrales triples (4 points)

- a. Un point (x, y) est la projection d'un point de V si et seulement si $x^2 + y^2 \leq 2 - x^2 - y^2$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 \leq 1$. **La projection de V est le disque unité Δ_1 .**



En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , le jacobien vaut r et V s'écrit $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $r^2 \leq z \leq 2 - r^2$. Par Fubini,

$$\text{Vol}(V) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 - 2r^2) r \, dr \, d\theta = 2\pi \left[r^2 - \frac{r^4}{2} \right]_0^1 = 2\pi \times \frac{1}{2}.$$

Le volume de V vaut π .

- b. En sphériques, B correspond à $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$, et $z^2 = r^2 \cos^2 \varphi$. Le jacobien vaut $r^2 \sin \varphi$, donc

$$\iiint_B z^2 = \int_0^1 r^4 \, dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \frac{1}{5} \times 2\pi \times \left[-\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^\pi = \frac{1}{5} \times 2\pi \times \frac{2}{3}.$$

On obtient $\iiint_B z^2 \, dx \, dy \, dz = \frac{4\pi}{15}$.

Vérification : $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) = \int_0^1 r^4 \, dr \times 2\pi \times 2 = \frac{4\pi}{5}$. Or la boule est

invariante par permutation des coordonnées, donc les intégrales de x^2 , y^2 et z^2 sont égales. Chacune vaut $\frac{1}{3} \times \frac{4\pi}{5} = \frac{4\pi}{15}$, ce qui confirme le résultat.

Barème : a) 0,5 point pour la projection et sa figure, 0,5 point pour la description en cylindriques, 1 point pour le calcul ; b) 0,5 point pour la mise en place, 1 point pour le calcul, 0,5 point pour la vérification par symétrie.

Exercice 5 : Problème : formes différentielles et formule de Green-Riemann (5 points)

- a. Posons $P = 2xy + 1$ et $Q = x^2 + 3y^2$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On a $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$, donc ω_1 est fermée. Comme $\mathbb{R}^2$ est étoilé, le théorème de Poincaré affirme qu'elle est exacte. On cherche f avec $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 1$: $f = x^2 y + x + g(y)$, puis $x^2 + g'(y) = x^2 + 3y^2$, donc $g(y) = y^3$.

Ainsi $f(x, y) = x^2 y + x + y^3$, et l'intégrale ne dépend que des extrémités :
 $f(1, 2) - f(0, 0) = 2 + 1 + 8$. **L'intégrale vaut 11 le long de tout chemin de $(0, 0)$ à $(1, 2)$.**

- b. Avec $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, on a $dx = -2\sin t \, dt$ et $dy = \cos t \, dt$. Donc $x \, dy - y \, dx = (2\cos^2 t + 2\sin^2 t)dt = 2 \, dt$, et $\oint_{\Gamma} x \, dy - y \, dx = 4\pi$.

Formule de Green-Riemann : si K est un compact du plan dont le bord ∂K est une courbe C^1 par morceaux orientée dans le sens direct, et si P , Q sont de classe C^1 sur un ouvert contenant K , alors

$$\oint_{\partial K} P \, dx + Q \, dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

Avec $P = -y$ et $Q = x$, on obtient $4\pi = \iint_K 2 \, dx \, dy = 2\mathcal{A}(K)$. **Donc l'aire de K vaut 2π** , conforme à la formule πab avec $a = 2$ et $b = 1$.

c. Ici $P = x^2 y$ et $Q = xy^2$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Donc $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 - x^2$, et Green-Riemann donne $\oint_{\Gamma} \omega = \iint_K (y^2 - x^2)$.

Avec $x = 2r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, le jacobien vaut $2r$. Ainsi

$$\iint_K x^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r^2 \cos^2 \theta \times 2r \, dr \, d\theta = 8 \times \frac{1}{4} \times \pi = 2\pi,$$

$$\iint_K y^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin^2 \theta \times 2r \, dr \, d\theta = 2 \times \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent $\oint_{\Gamma} x^2 y \, dx + xy^2 \, dy = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$.

d. Posons $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ et $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Le calcul donne

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

donc ω_4 est fermée. Sur le cercle unité, $x = \cos t$, $y = \sin t$, et $\omega_4 = (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = dt$: **l'intégrale vaut** 2π .

Si ω_4 était exacte, son intégrale sur toute courbe fermée serait nulle. **Donc ω_4 est fermée**

mais pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Cela ne contredit ni Poincaré, car l'ouvert n'est pas étoilé, ni Green-Riemann, car ω_4 n'est pas définie en O , qui appartient au disque bordé par le cercle.

Barème : a) 0,25 point pour la fermeture, 0,25 point pour Poincaré, 0,25 point pour la primitive, 0,25 point pour la valeur 11 ; b) 0,5 point pour le calcul direct, 0,5 point pour l'énoncé de Green-Riemann, 0,5 point pour l'aire ; c) 0,5 point pour l'application de Green-Riemann, 0,75 point pour les deux intégrales, 0,25 point pour le résultat ; d) 0,25 point pour la fermeture, 0,5 point pour l'intégrale, 0,25 point pour la conclusion.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : intégrales doubles, triples et curvilignes

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Intégrales multiples » en L2](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégrales multiples](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).