

Corrigé du contrôle de maths L2 : intégrales dépendant d'un paramètre

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : continuité et dérivation sous l'intégrale	3 points
Exercice 2 : Une intégrale calculée par dérivation	4 points
Exercice 3 : La fonction Gamma d'Euler	5 points
Exercice 4 : Problème : l'intégrale de Gauss	8 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : continuité et dérivation sous l'intégrale (3 points)

a. **Théorème de continuité.** On suppose que :

(i) pour tout $t \in I$, la fonction $x \rightarrow k(x, t)$ est continue sur A ;

(ii) pour tout $x \in A$, la fonction $t \rightarrow k(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;

(iii) il existe φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que $|k(x, t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x, t) \in A \times I$ (domination).

Alors $x \rightarrow \int_I k(x, t) dt$ **est définie et continue sur** A . Il suffit d'ailleurs que la domination ait lieu sur chaque segment de A , car la continuité est une propriété locale.

b. **Théorème de dérivation.** On suppose que :

(i) pour tout $x \in A$, la fonction $t \rightarrow k(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;

(ii) la dérivée partielle $\frac{\partial k}{\partial x}$ existe sur $A \times I$, elle est continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t ;

(iii) pour tout segment $J \subset A$, il existe φ_J positive et intégrable sur I telle que $\left| \frac{\partial k}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_J(t)$ pour tout $(x, t) \in J \times I$.

Alors $K : x \rightarrow \int_I k(x, t) dt$ **est de classe** C^1 **sur** A , **et** $K'(x) = \int_I \frac{\partial k}{\partial x}(x, t) dt$.

c. Posons $k(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ sur $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$. Cette fonction est continue en chaque variable. Pour tous $x \geq 0$ et $t \geq 0$, on a $0 < k(x, t) \leq \frac{1}{1+t^2}$, et cette dernière fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$ (son intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$). Le théorème de continuité montre que F **est définie et continue sur** $[0, +\infty[$.

Ensuite, $\frac{\partial k}{\partial x}(x, t) = \frac{-t e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue. Soit $[a, b]$ avec $0 < a < b$. Pour $x \in [a, b]$ et $t \geq 0$, comme $\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$,

$$\left| \frac{\partial k}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t e^{-at}}{1+t^2} \leq \frac{1}{2} e^{-at},$$

qui est intégrable sur $]0, +\infty[$ car $a > 0$. Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Barème : a) 1 point (hypothèses de continuité 0,5, domination 0,5) ; b) 1 point (hypothèses 0,5, domination locale et formule 0,5) ; c) 1 point : 0,5 pour la continuité, 0,5 pour la domination sur $[a, b]$.

Exercice 2 : Une intégrale calculée par dérivation (4 points)

a. Soit $x > -1$. La fonction $u_x : t \rightarrow \frac{t^x - 1}{\ln t}$ est continue sur $]0, 1[$.

En 1 : on a $t^x - 1 = e^{x \ln t} - 1 \sim x \ln t$ quand $t \rightarrow 1$, car $x \ln t \rightarrow 0$. Donc $u_x(t) \rightarrow x$: la fonction se prolonge par continuité en 1 et elle est intégrable au voisinage de 1.

En 0 : pour $t \in]0, e^{-1}]$, on a $|\ln t| \geq 1$, donc

$$|u_x(t)| \leq t^x + 1.$$

Or $t \rightarrow t^x$ est intégrable sur $]0, e^{-1}]$, car c'est une fonction de Riemann d'exposant $-x < 1$. Par comparaison, u_x est intégrable au voisinage de 0.

Ainsi u_x est intégrable sur $]0, 1[$ et F est définie sur $]-1, +\infty[$.

b. Posons $k(x, t) = \frac{t^x - 1}{\ln t}$ sur $]-1, +\infty[\times]0, 1[$. Pour t fixé, $x \rightarrow t^x = e^{x \ln t}$ est dérivable et

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x, t) = \frac{t^x \ln t}{\ln t} = t^x,$$

fonction continue en (x, t) . D'après a), $t \rightarrow k(x, t)$ est intégrable pour tout $x > -1$.

Domination : soit $[a, b] \subset]-1, +\infty[$. Pour $x \in [a, b]$ et $t \in]0, 1[$, on a $\ln t < 0$ et $x \geq a$, donc $0 < t^x = e^{x \ln t} \leq e^a \ln t = t^a$. La fonction $t \rightarrow t^a$ est intégrable sur $]0, 1[$ car $a > -1$, et elle ne dépend pas de x .

Le théorème de dérivation sous le signe intégrale s'applique sur chaque segment, donc sur

$$]-1, +\infty[: F \text{ est de classe } C^1 \text{ et } F'(x) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}.$$

c. On a $F(0) = \int_0^1 0 dt = 0$. Comme $F'(x) = \frac{1}{x+1}$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$, il vient $F(x) = \ln(1+x) + C$ avec $C = F(0) - \ln 1 = 0$. **Donc** $F(x) = \ln(1+x)$ **pour tout** $x > -1$, et en particulier

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = F(1) = \ln 2.$$

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour le prolongement en 1, 1 pour la comparaison en 0 ; b) 1,5 point : 0,5 pour la dérivée partielle, 0,5 pour la domination sur $[a, b]$, 0,5 pour F' ; c) 1 point : 0,5 pour la constante, 0,5 pour $\ln 2$.

Erreur fréquente : dominer par t^{-1} « pour tout $x > -1$ » : une domination uniforme sur tout l'intervalle n'existe pas ici, d'où la nécessité de travailler sur un segment $[a, b]$.

Exercice 3 : La fonction Gamma d'Euler (5 points)

a. La fonction $t \rightarrow t^{x-1} e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

En 0 : $t^{x-1} e^{-t} \sim t^{x-1}$, intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $1 - x < 1$, c'est-à-dire $x > 0$ (critère de Riemann et comparaison des fonctions positives équivalentes).

En $+\infty$: $t^2 \times t^{x-1} e^{-t} = t^{x+1} e^{-t} \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc $t^{x-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, intégrable pour tout x .

Donc $\Gamma(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$.

b. Soit $x > 0$ et $0 < \varepsilon < A$. Par intégration par parties sur le segment $[\varepsilon, A]$, avec $u(t) = t^x$ et $v(t) = -e^{-t}$ de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_{\varepsilon}^A t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_{\varepsilon}^A + x \int_{\varepsilon}^A t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon^x e^{-\varepsilon} \rightarrow 0$ car $x > 0$; quand $A \rightarrow +\infty$, $A^x e^{-A} \rightarrow 0$. Les deux intégrales convergent d'après a). À la limite : $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.

Comme $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, une récurrence donne

$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = \dots = n! \Gamma(1)$. **Donc $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.**

c. Posons $k(x, t) = t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln t} e^{-t}$. Pour $j \in \{1, 2\}$, on a $\frac{\partial^j k}{\partial x^j}(x, t) = (\ln t)^j t^{x-1} e^{-t}$, continue en (x, t) sur $]0, +\infty[^2$.

Domination : soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Pour $x \in [a, b]$, on a $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ si $0 < t \leq 1$ et $t^{x-1} \leq t^{b-1}$ si $t \geq 1$. Donc, pour $j \in \{0, 1, 2\}$,

$$\left| \frac{\partial^j k}{\partial x^j}(x, t) \right| \leq \varphi_j(t) = |\ln t|^j (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t}.$$

La fonction φ_j est intégrable : en 0, $|\ln t|^j t^{a-1} = o\left(t^{\frac{a}{2}-1}\right)$ car $t^{a/2} |\ln t|^j \rightarrow 0$, et $\frac{a}{2}-1 > -1$; en $+\infty$, $\varphi_j(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

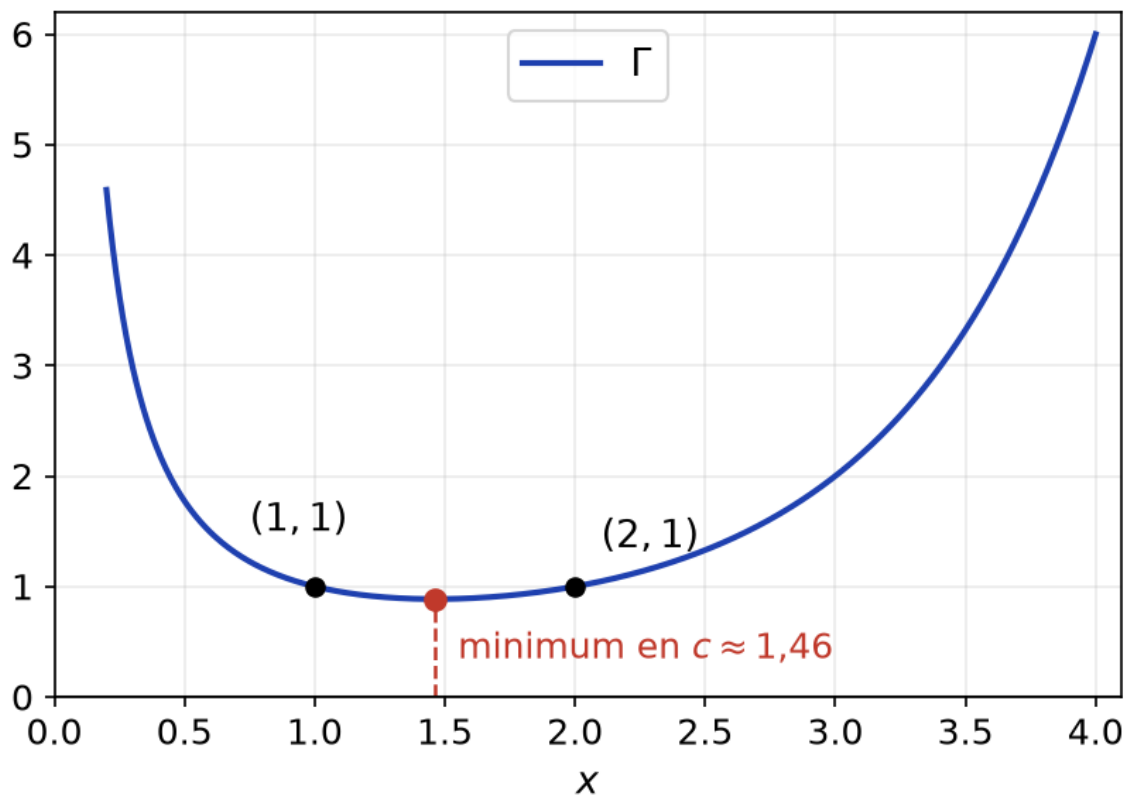
Le théorème de dérivation sous le signe intégrale, appliqué deux fois sur chaque segment, donne :

$$\Gamma \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt.$$

- d. L'intégrande de $\Gamma''(x)$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $]0, +\infty[$; donc $\Gamma''(x) > 0$ et Γ est strictement convexe.

D'après b), $\Gamma(1) = 0! = 1$ et $\Gamma(2) = 1! = 1$. La fonction Γ est dérivable sur $[1, 2]$; le théorème de Rolle fournit $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$. Comme $\Gamma'' > 0$, la fonction Γ' est strictement croissante : elle est strictement négative sur $]0, c[$ et strictement positive sur $]c, +\infty[$, et c est son unique zéro.

Donc Γ est strictement décroissante puis strictement croissante, et atteint son minimum global en l'unique point $c \in]1, 2[$. Numériquement, $c \approx 1,46$ et $\Gamma(c) \approx 0,886$.



Barème : a) 1 point (0,5 par borne) ; b) 1 point : 0,5 pour l'intégration par parties avec passage à la limite, 0,5 pour $n!$; c) 1,5 point : 1 pour la domination complète sur $[\alpha, b]$, 0,5 pour la conclusion ; d) 1,5 point : 0,5 pour la convexité, 0,5 pour Rolle, 0,5 pour le minimum unique.

Exercice 4 : Problème : l'intégrale de Gauss (8 points)

- a. Posons $k(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Cette fonction est continue, et sa dérivée partielle

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x, t) = -2x e^{-x^2(1+t^2)}$$

est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

Domination : soit $A > 0$. Pour $x \in [-A, A]$ et $t \in [0, 1]$, on a $\left| \frac{\partial k}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2A$, fonction constante intégrable sur le segment $[0, 1]$.

Le théorème de dérivation sous le signe intégrale s'applique sur chaque segment $[-A, A]$.

Donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt$.

b. La fonction $G : x \rightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt$ est la primitive de la fonction continue $t \rightarrow e^{-t^2}$ nulle en 0. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$, et $f = G^2$ aussi, avec

$$f'(x) = 2 G'(x) G(x) = 2 e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du.$$

Pour $x \neq 0$, on effectue dans $g'(x)$ le changement de variable affine $u = xt$, avec $du = x dt$:

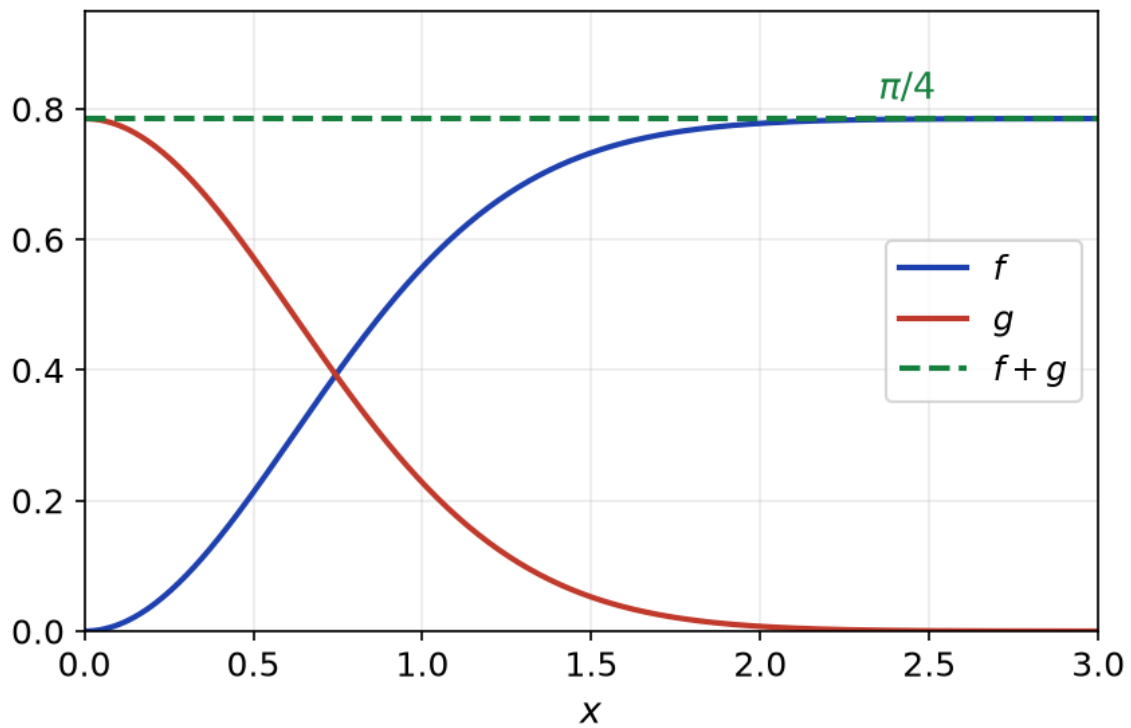
$$g'(x) = -2 e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} x dt = -2 e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -f'(x).$$

Pour $x = 0$, on a $f'(0) = 0 = g'(0)$. **Donc $f' + g' = 0$ sur $\mathbb{R}$.**

La fonction $f + g$ est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, égale à

$$f(0) + g(0) = 0 + \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout réel x .



- c. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $e^{-x^2(1+t^2)} = e^{-x^2} e^{-x^2 t^2} \leq e^{-x^2}$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq g(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} e^{-x^2}.$$

Comme $e^{-x^2} \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

- d. La fonction $t \rightarrow e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, et $t^2 e^{-t^2} \rightarrow 0$ en $+\infty$, donc $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$: l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge. Ainsi $G(x) \rightarrow I$ quand $x \rightarrow +\infty$, et $f(x) \rightarrow I^2$.

Par b) et c), $f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x) \rightarrow \frac{\pi}{4}$. Par unicité de la limite, $I^2 = \frac{\pi}{4}$. Comme $I \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive), $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

e. Dans $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt$, on effectue le changement de variable $t = u^2$, où $u \rightarrow u^2$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même, avec $dt = 2u du$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2u du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Donc $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Barème : a) 2 points : 0,5 pour la continuité de la dérivée partielle, 1 pour la domination sur $[-A, A]$, 0,5 pour la formule ; b) 2 points : 0,5 pour f' , 1 pour le changement de variable, 0,5 pour la constante $\frac{\pi}{4}$; c) 1,5 point : 1 pour la majoration, 0,5 pour la limite ; d) 1,5 point : 0,5 pour la convergence, 0,5 pour le passage à la limite, 0,5 pour le signe de I ; e) 1 point : 0,5 pour le changement de variable justifié, 0,5 pour le résultat.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : intégrales dépendant d'un paramètre

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Intégrales à paramètre » en L2](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégrales à paramètre](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : partiel de S4, séries entières et de Fourier](#)