Corrigé du contrôle de maths L2 : groupes, sous-groupes et morphismes

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : le théorème de Lagrange	4 points
Exercice 2 : Le groupe cyclique Z/12Z	4 points
Exercice 3 : Une permutation de S_7	4 points
Exercice 4 : Un morphisme vers le cercle unité	3 points
Exercice 5 : Problème : groupes d'ordre 4 et morphismes	5 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Question de cours : le théorème de Lagrange (4 points)

a. La relation est **réflexive** : $x^{-1}x = e \in H$. Elle est **symétrique** : si $x^{-1}y \in H$, alors son inverse $y^{-1}x$ appartient aussi à H, car H est un sous-groupe. Elle est **transitive** : si $x^{-1}y \in H$ et $y^{-1}z \in H$, alors $x^{-1}z = (x^{-1}y)(y^{-1}z) \in H$. C'est donc une relation d'équivalence. Enfin, $y \sim x$ équivaut à $x^{-1}y = h \in H$, c'est-à-dire $y = xh$. La classe de x est donc xH.

b. L'application $\lambda_x : H \to xH$, $h \to xh$, est surjective par définition de xH. Elle est injective : si $xh = xh'$, on multiplie à gauche par x^{-1} et on obtient $h = h'$. Donc λ_x **est une bijection** et $|xH| = |H|$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

c. **Théorème de Lagrange :** si G est un groupe fini et H un sous-groupe de G, alors $|H|$ divise $|G|$.

Démonstration. Les classes d'équivalence de $\sim$ forment une partition de G. Notons $x_1H, \ldots, x_rH$ ces classes, deux à deux distinctes. D'après b, chacune a $|H|$ éléments. Donc $|G| = r\,|H|$, et $|H|$ **divise** $|G|$. L'entier r est l'indice de H dans G.

d. Soit $x \in G$ d'ordre m. Le sous-groupe engendré $\langle x \rangle = \{e, x, \ldots, x^{m-1}\}$ a exactement m éléments. D'après Lagrange, m **divise** $|G|$.

Si $|G| = p$ est premier, on choisit $x \neq e$. Son ordre divise p et n'est pas 1, donc il vaut p. Alors $\langle x \rangle$ a p éléments, donc $\langle x \rangle = G$: G **est cyclique**, engendré par n'importe quel élément différent du neutre.

Barème : a) 0,75 point pour les trois propriétés, 0,25 point pour la classe ; b) 1 point ; c) 0,25 point pour l'énoncé, 0,75 point pour la preuve par partition ; d) 0,5 point pour l'ordre, 0,5 point pour le groupe d'ordre premier.

Exercice 2 : Le groupe cyclique Z/12Z (4 points)

a. Posons $g = k \wedge 12$, $k = gk'$ et $12 = g\,n'$, avec $k' \wedge n' = 1$. Pour $m \geq 1$, on a $m\bar{k} = \bar{0}$ si et seulement si $12 \mid mk$, c'est-à-dire $n' \mid mk'$. D'après le lemme de Gauss, cela équivaut à $n' \mid m$. Le plus petit tel m est donc n' : **l'ordre de** $\bar{k}$ **est** $\frac{12}{k \wedge 12}$. On obtient le tableau suivant.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ordre	1	12	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12

b. Un générateur est un élément d'ordre 12. Ce sont donc les classes $\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11}$, c'est-à-dire les k premiers avec 12 : il y en a $\varphi(12) = 4$.

c. Soit H un sous-groupe et $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ la projection, qui est un morphisme surjectif. L'image réciproque $\pi^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ contenant $12\mathbb{Z}$. Or les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $d\mathbb{Z}$, donc $\pi^{-1}(H) = d\mathbb{Z}$ avec $d \geq 1$. Comme $12 \in d\mathbb{Z}$, l'entier

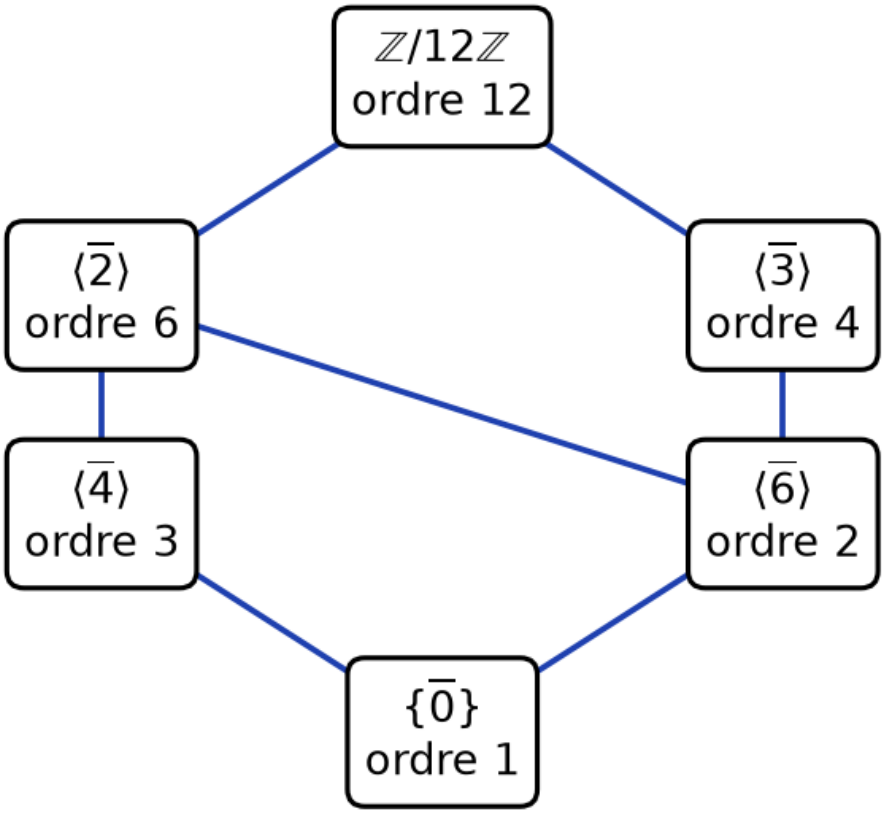
d divise 12. Par surjectivité de π, $H = \pi(d\mathbb{Z}) = \langle \bar{d} \rangle$, d'ordre $12/d$.

Les diviseurs de 12 sont $1, 2, 3, 4, 6, 12$. On obtient donc **exactement six sous-groupes** :

$\langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (ordre 12), $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$ (ordre 6), $\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ (ordre 4),

$\langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ (ordre 3), $\langle \bar{6} \rangle = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ (ordre 2) et $\{\bar{0}\}$ (ordre 1).

De plus, $\langle \bar{d} \rangle \subset \langle \bar{d'} \rangle$ si et seulement si d' divise d. Le schéma ci-dessous résume ces inclusions.



d. Si $x \equiv x' \pmod{12}$, alors $3x - 3x' = 3(x - x')$ est multiple de 12. Donc f est **bien**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

définie. Ensuite, $f(\overline{x}+\overline{y}) = \overline{3x+3y} = f(\overline{x}) + f(\overline{y})$, donc f est un morphisme.

Par ailleurs, $3x \equiv 0 \pmod{12}$ équivaut à $4 \mid x$. Donc $\ker f = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$ et $\operatorname{Im} f = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\} = \langle \overline{3} \rangle$. On vérifie $3 \times 4 = 12$.

Barème : a) 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour le tableau ; b) 0,5 point ; c) 1 point pour la preuve, 0,5 point pour la liste et les inclusions ; d) 0,5 point pour la bonne définition et le morphisme, 0,5 point pour noyau et image.

Exercice 3 : Une permutation de S_7 (4 points)

a. On suit les orbites. D'abord $1 \to 3 \to 5 \to 1$. Ensuite $2 \to 7 \to 4 \to 6 \to 2$. Tous les éléments de $\{1, \ldots, 7\}$ sont atteints, donc $\sigma = (1\ 3\ 5)(2\ 7\ 4\ 6)$, produit d'un 3-cycle et d'un 4-cycle à supports disjoints.

b. Les deux cycles commutent car leurs supports sont disjoints. L'ordre de σ est donc le ppcm des longueurs : $\operatorname{ppcm}(3,4) = 12$. Un cycle de longueur ℓ a pour signature $(-1)^{\ell-1}$, et la signature est un morphisme. Donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^2 \times (-1)^3$, soit $\varepsilon(\sigma) = -1$: σ est impaire.

c. Posons $c_1 = (1\ 3\ 5)$ et $c_2 = (2\ 7\ 4\ 6)$. Comme ils commutent, $\sigma^{2026} = c_1^{2026}\, c_2^{2026}$. Or $2026 = 3 \times 675 + 1$, donc $c_1^{2026} = c_1$. De même, $2026 = 4 \times 506 + 2$, donc $c_2^{2026} = c_2^2$. Enfin c_2^2 envoie 2 sur 4, 4 sur 2, 7 sur 6 et 6 sur 7. Ainsi $\sigma^{2026} = (1\ 3\ 5)(2\ 4)(6\ 7)$.

d. L'ordre d'une permutation est le ppcm des longueurs de ses cycles disjoints, dont la somme vaut au plus 7. On passe en revue les partitions de 7 : 7 donne 7 ; $6+1$ donne 6 ; $5+2$ donne 10 ; $4+3$ donne 12 ; $4+2+1$ donne 4 ; $3+2+2$ donne 6 ; les autres donnent au plus 6. **Le plus grand ordre est 12**, atteint par exemple par σ.

Erreur fréquente : additionner les longueurs des cycles au lieu de prendre leur ppcm pour obtenir l'ordre.

Barème : a) 1 point ; b) 0,5 point pour l'ordre, 0,5 point pour la signature ; c) 0,5 point pour la réduction des exposants, 0,5 point pour le résultat ; d) 0,5 point pour la méthode, 0,5 point pour la valeur 12.

Exercice 4 : Un morphisme vers le cercle unité (3 points)

a. Pour $s, t \in \mathbb{R}$, $\varphi(s+t) = e^{2i\pi(s+t)} = e^{2i\pi\, s}\, e^{2i\pi\, t} = \varphi(s)\varphi(t)$. Donc φ **est un morphisme** de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

b. On a $\varphi(t) = 1$ si et seulement si $2\pi\, t \in 2\pi\mathbb{Z}$, donc $\ker \varphi = \mathbb{Z}$. Ensuite, $|\varphi(t)| = 1$, donc $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathbb{U}$. Réciproquement, tout $z \in \mathbb{U}$ s'écrit $e^{i\theta}$, et alors $z = \varphi\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$. Donc $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{U}$.

c. Notons e et e' les neutres. Si f est injectif, alors $x \in \ker f$ donne $f(x) = e' = f(e)$, donc $x = e$. Réciproquement, supposons $\ker f = \{e\}$. Si $f(x) = f(y)$, alors $f(x^{-1}y) = f(x)^{-1}f(y) = e'$, donc $x^{-1}y = e$ et $x = y$. f **est injectif si et seulement si** $\ker f = \{e\}$ **.**

d. Si $z^n = 1$, alors $|z|^n = 1$, donc $|z| = 1$: $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$. Ensuite $1 \in \mathbb{U}_n$ et, si $z, w \in \mathbb{U}_n$, $(zw^{-1})^n = 1$: c'est un sous-groupe. Enfin, ses éléments sont les n racines distinctes ω^k, $0 \leq k \leq n-1$, avec $\omega = e^{2i\pi/n}$. Donc $\mathbb{U}_n = \langle\, \omega \,\rangle$ **est cyclique d'ordre** n.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour le noyau, 0,5 point pour l'image avec les deux inclusions ; c) 0,5 point par implication ; d) 0,5 point.

Exercice 5 : Problème : groupes d'ordre 4 et morphismes (5 points)

a. L'hypothèse $x^2 = e$ signifie $x = x^{-1}$ pour tout x. Soit $x, y \in G$. Alors $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$. Donc G **est commutatif**.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. D'après le théorème de Lagrange, l'ordre de tout élément divise 4 : il vaut 1, 2 ou 4.

S'il existe un élément d'ordre 4, il engendre un sous-groupe à 4 éléments, donc égal à G : G **est cyclique**, isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Sinon, tout $x \neq e$ est d'ordre 2, et $x^2 = e$ **pour tout** $x \in G$.

Dans le premier cas, $G = \langle g \rangle$ et $g^i g^j = g^{i+j} = g^j g^i$. Dans le second cas, on applique a. **Tout groupe d'ordre 4 est donc commutatif.**

c. Dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, on a $12 \cdot \bar{1} = \bar{0}$. Comme f est un morphisme, $f(12 \cdot \bar{1}) = 12\, f(\bar{1}) = \dot{0}$, donc $12a \equiv 0 \pmod 8$. Cette condition équivaut à $8 \mid 12a$, soit $2 \mid 3a$, soit a pair : $a \in \{0, 2, 4, 6\}$.

Réciproquement, soit a pair. On pose $f_a(\overline{x}) = (\dot{xa})$. C'est bien défini : si $x - x' = 12k$, alors $(x - x')a = 12ak$ est multiple de 8, car $12a$ l'est. C'est un morphisme, par distributivité.

Enfin, un morphisme est déterminé par l'image du générateur $\bar{1}$, car $f(\overline{x}) = x\, f(\bar{1})$. **Il y a donc exactement quatre morphismes :** f_0, f_2, f_4, f_6.

d. Si f était injectif, $\operatorname{Im} f$ serait un sous-groupe de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ à 12 éléments. Or 12 ne divise pas 8, ce qui contredit Lagrange : **aucun morphisme n'est injectif**. Par ailleurs, $\operatorname{Im} f_a = \langle \dot{a} \rangle \subset \langle \dot{2} \rangle = \{\dot{0}, \dot{2}, \dot{4}, \dot{6}\}$, qui a 4 éléments. Donc **aucun morphisme n'est surjectif**. Autre argument : $|\operatorname{Im} f|$ divise 12, comme cardinal d'une image, et 8, par Lagrange ; il divise donc 4.

Barème : a) 1 point ; b) 0,5 point pour Lagrange, 0,5 point pour la dichotomie, 0,5 point pour la commutativité ; c) 0,5 point pour la condition, 0,5 point pour la bonne définition, 0,5 point pour le dénombrement ; d) 0,5 point pour l'injectivité, 0,5 point pour la surjectivité.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : groupes, sous-groupes et morphismes

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Groupes » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** groupes.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L2** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.