

Corrigé du contrôle de maths L2 : géométrie affine et barycentres

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : barycentre et applications affines	4 points
Exercice 2 : Plans et droites de l'espace affine	4 points
Exercice 3 : Homothéties, translations et projections	4 points
Exercice 4 : Barycentre de trois points et associativité	3 points
Exercice 5 : Problème : théorèmes de Ménélaüs et de Ceva	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : barycentre et applications affines (4 points)

a. Fixons un point O de $\mathcal{E}$. Pour tout point M , la relation de Chasles donne

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}) = \alpha \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.$$

Ainsi M vérifie la relation demandée si et seulement si $\alpha \overrightarrow{OM} = \sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$. Comme $\alpha \neq 0$, cela équivaut à $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\alpha} \sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$. Or un point est déterminé de façon unique par son vecteur depuis O . **Il existe donc un unique point G , et**
 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ **pour tout point O .**

b. L'application f est affine : pour tous points M, N , on a $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{MN})$. Par linéarité de $\vec{f}$,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{f}(\overrightarrow{GA_i}) = \vec{f}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}.$$

La somme des poids vaut toujours $\alpha \neq 0$. Par l'unicité démontrée en a), $f(G)$ **est le barycentre des $(f(A_i), \alpha_i)$: une application affine conserve les barycentres.**

Barème : a) 0,75 point pour le calcul par Chasles, 0,75 point pour l'existence et l'unicité, 0,5 point pour l'expression de OG ; b) 0,5 point pour la propriété de la partie linéaire, 1 point pour le calcul, 0,5 point pour la conclusion par unicité.

Exercice 2 : Plans et droites de l'espace affine (4 points)

a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-1, 2, 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1, 0, 3)$ ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée est nulle pour l'un, pas pour l'autre). Les points ne sont donc pas alignés et définissent un plan. Cherchons une équation $ax + by + cz = d$: A donne $a = d$, B donne $2b = d$, C donne $3c = d$. Avec $d = 6$, on obtient

$$\mathcal{P} : 6x + 3y + 2z = 6.$$

Vérification : $6 \times 1 = 6$, $3 \times 2 = 6$ et $2 \times 3 = 6$.

- b. La direction de $\mathcal{P}$ est le plan vectoriel $6x + 3y + 2z = 0$. Or $6 \times 1 + 3 \times 0 + 2 \times (-3) = 0$, donc $\vec{u}$ appartient à la direction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}_1$ est parallèle à $\mathcal{P}$. De plus, $6 \times 2 + 3 \times 1 + 0 = 15 \neq 6$, donc $E \notin \mathcal{P}$. **La droite $\mathcal{D}_1$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.**
- c. Un point (x, y, z) appartient à $\mathcal{D}_2$ si et seulement s'il existe t tel que $(x, y, z) = (t, 2t, 0)$. **Un système d'équations de $\mathcal{D}_2$ est $y = 2x$, $z = 0$.** En reportant dans l'équation de $\mathcal{P}$: $6t + 6t = 6$, donc $t = \frac{1}{2}$. **Ainsi $I(\frac{1}{2}, 1, 0)$.**
- d. On cherche (α, β, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $I = \alpha A + \beta B + \gamma C$, c'est-à-dire $(\frac{1}{2}, 1, 0) = (\alpha, 2\beta, 3\gamma)$. Donc $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 0$, et la somme vaut bien 1. **Les coordonnées barycentriques de I sont $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$: I est le milieu de $[AB]$.**

Barème : a) 0,25 point pour le non-alignement, 0,75 point pour l'équation ; b) 0,5 point pour le parallélisme, 0,5 point pour le caractère strict ; c) 0,5 point pour le système, 0,5 point pour I ; d) 0,75 point pour les coordonnées, 0,25 point pour l'interprétation.

Exercice 3 : Homothéties, translations et projections (4 points)

- a. Chaque coordonnée de $f(x, y)$ et de $g(x, y)$ est une fonction affine de (x, y) , donc f et g sont affines. La partie linéaire de f est $\vec{f} = -2 \text{Id}$; celle de g est Id .

Un point fixe de f vérifie $x = -2x + 3$ et $y = -2y + 6$, soit $O(1, 2)$. **Donc f est l'homothétie de centre $O(1, 2)$ et de rapport -2 , et g est la translation de vecteur $\vec{w}(2, -1)$.**

- b. On calcule $f \circ g(x, y) = f(x + 2, y - 1) = (-2x - 1, -2y + 8)$. Sa partie linéaire est $\vec{f} \circ \text{Id} = -2 \text{Id}$, qui n'est pas l'identité, donc $f \circ g$ a un unique point fixe. Il vérifie $x = -2x - 1$ et $y = -2y + 8$. **Ainsi $f \circ g$ est l'homothétie de rapport -2 et de centre $O'(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3})$.**

Retrouvons ce centre. Le point O' est fixe si et seulement si $\overrightarrow{OO'} = -2(\overrightarrow{OO'} + \vec{w})$, c'est-à-dire $3\overrightarrow{OO'} = -2\vec{w}$. Donc $\overrightarrow{OO'} = -\frac{2}{3}(2, -1) = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, et l'on retrouve $O'(1 - \frac{4}{3}, 2 + \frac{2}{3})$.

- c. Posons $s = x + y$. Alors $p(x, y) = (\frac{s+1}{2}, \frac{s-1}{2})$, dont la somme des coordonnées vaut encore s . Donc $p(p(x, y)) = p(x, y)$: $p \circ p = p$.

Un point fixe vérifie $2x = x + y + 1$ et $2y = x + y - 1$, deux équations toutes deux équivalentes à $x - y = 1$. L'ensemble des points fixes est donc la droite $\Delta : x - y = 1$, de direction $\text{Vect}(1, 1)$. La partie linéaire $\vec{p}(x, y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$ a pour noyau $\text{Vect}(1, -1)$.

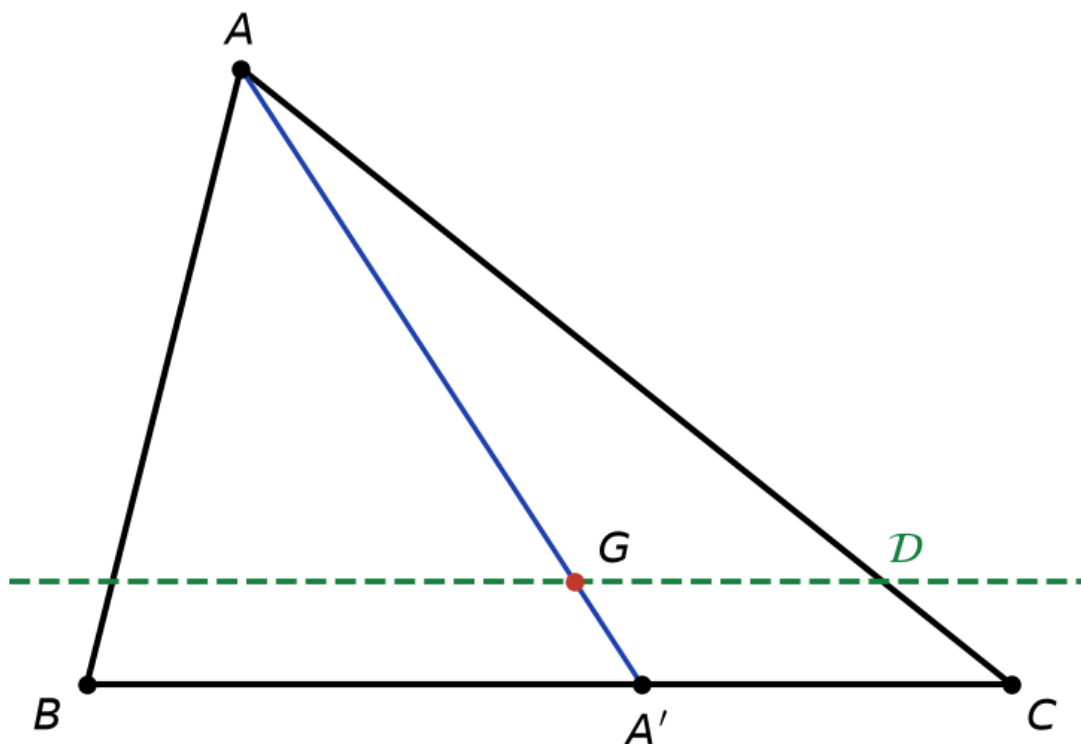
Enfin, $p(M) \in \Delta$ pour tout M , et $\overrightarrow{Mp(M)} = \frac{1-x+y}{2}(1, -1)$ est dans $\text{Vect}(1, -1)$. **Donc p est la projection sur la droite $\Delta : x - y = 1$, parallèlement à la direction $\text{Vect}(1, -1)$.**

Barème : a) 0,5 point pour l'homothétie et son centre, 0,5 point pour la translation ; b) 0,5 point pour le calcul de la composée, 0,5 point pour la nature et le centre, 0,5 point pour la vérification par le vecteur ; c) 0,5 point pour $p \circ p = p$, 0,5 point pour Δ et le noyau, 0,5 point pour la conclusion.

Erreur fréquente : affirmer que la composée d'une homothétie et d'une translation est une translation ; c'est la partie linéaire -2 Id qui décide de la nature.

Exercice 4 : Barycentre de trois points et associativité (3 points)

- a. Les poids 2 et 3 ont une somme non nulle, donc A' existe. Par associativité du barycentre, G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(A', 5)$. Donc $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{1+5} \overrightarrow{AA'}$. Ainsi $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6} \overrightarrow{AA'}$, et comme $0 \leq \frac{5}{6} \leq 1$, G appartient au segment $[AA']$.
- b. En prenant $O = A$ dans la formule du cours, $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}(2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
Les coordonnées de G sont $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.
- c. Pour tout point M , la réduction vue en cours donne $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$. Ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ si et seulement si $M = G$ ou la droite (MG) est parallèle à (BC) . **L'ensemble $\mathcal{D}$ est la droite passant par G et parallèle à (BC) .**



Barème : a) 0,5 point pour l'associativité, 0,5 point pour la relation et l'appartenance au segment ; b) 1 point ; c) 0,5 point pour la réduction, 0,5 point pour la droite.

Exercice 5 : Problème : théorèmes de Ménélaüs et de Céva (5 points)

a. La relation $\overrightarrow{PB} - p \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ montre que **P est le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, -p)$** , qui existe car $1 - p \neq 0$. De même, **Q est le barycentre de $(C, 1)$, $(A, -q)$ et R celui de $(A, 1)$, $(B, -r)$** .

b. D'après a), pour tout point O :

$$(1-p)\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} - p\overrightarrow{OC}, (1-q)\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} - q\overrightarrow{OA}, (1-r)\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} - r\overrightarrow{OB}.$$

On multiplie la deuxième égalité par p et la troisième par pq , en utilisant $pqr = 1$:

$$p(1-q)\overrightarrow{OQ} = p\overrightarrow{OC} - pq\overrightarrow{OA}, pq(1-r)\overrightarrow{OR} = pq\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.$$

En additionnant les trois relations, tous les termes du second membre se simplifient, ce qui donne la relation demandée. Ses coefficients ont pour somme

$$1-p+p-pq+pq-pqr = 1-pqr = 0.$$

Prenons alors $O = P$: il reste $p(1-q)\overrightarrow{PQ} + pq(1-r)\overrightarrow{PR} = \vec{0}$, avec $p(1-q) \neq 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires : P, Q, R sont alignés.

c. Les poids $pq, 1, -p$ ont pour somme $pq + 1 - p \neq 0$, donc G existe. On utilise l'associativité trois fois :

- $1 + (-p) = 1 - p \neq 0$ et le barycentre de $(B, 1), (C, -p)$ est P . Donc G est barycentre de (A, pq) et $(P, 1 - p)$, et $G \in (AP)$.
- $pq + (-p) = p(q - 1) \neq 0$. Le barycentre de $(C, -p), (A, pq)$ est celui de $(C, 1), (A, -q)$ (poids divisés par $-p$), c'est-à-dire Q . Donc $G \in (BQ)$.
- $pq + 1 \neq 0$, car $pq = -\frac{1}{r}$ et $r \neq 1$. En divisant les poids par pq , le barycentre de $(A, pq), (B, 1)$ est celui de $(A, 1), (B, \frac{1}{pq})$, soit $(A, 1), (B, -r)$: c'est R . Donc $G \in (CR)$.

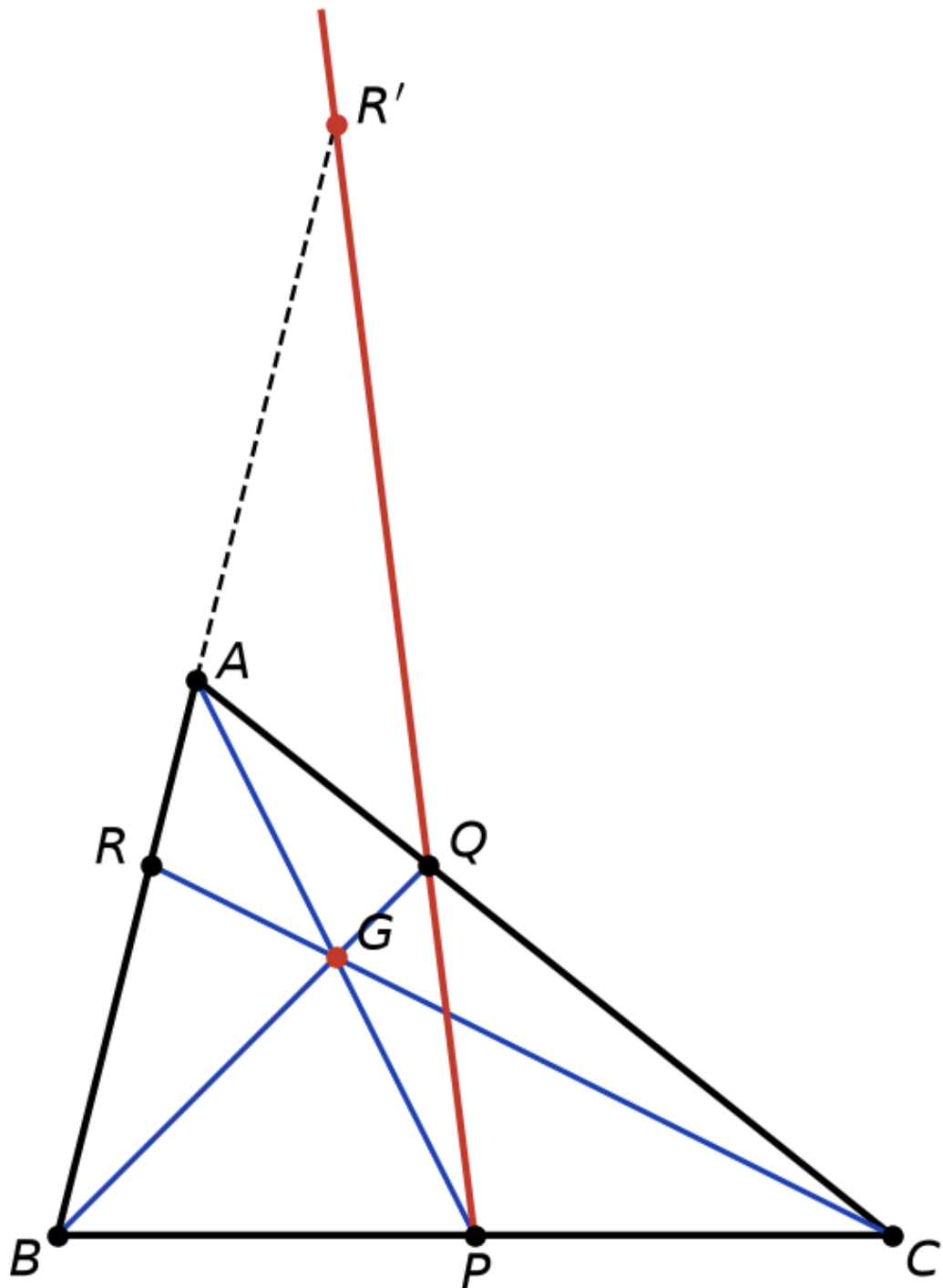
Les trois droites $(AP), (BQ), (CR)$ passent par G : elles sont concourantes. (Si $pq + 1 - p = 0$, le même calcul montre qu'elles sont parallèles.)

d. Ici $\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{PC}$, donc $p = -1$. Ensuite, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ signifie que Q est barycentre

de $(A, 2), (C, 1) : 2\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} = \vec{0}$, donc $q = -2$.

Concours. On veut $pqr = -1$, soit $2r = -1$, donc $r = -\frac{1}{2}$. Alors R est barycentre de $(A, 1), (B, \frac{1}{2})$, c'est-à-dire de $(A, 2), (B, 1)$. **Le point R vérifie $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.** La condition $pq + 1 - p = 4 \neq 0$ est vérifiée. Le point de concours est le barycentre de $(A, 2), (B, 1), (C, 1)$, soit de $(A, 2), (P, 2) : \text{c'est le milieu de } [AP]$.

Alignement. D'après b), il suffit que $pqr' = 1$, soit $r' = \frac{1}{2}$. Alors R' est barycentre de $(A, 1), (B, -\frac{1}{2})$, soit de $(A, 2), (B, -1)$. Donc $\overrightarrow{AR'} = \frac{-1}{2-1}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$. **Le point R' est le symétrique de B par rapport à A .**



Barème : a) 0,5 point ; b) 0,75 point pour la relation, 0,25 point pour la somme nulle des coefficients, 0,5 point pour l'alignement ; c) 0,25 point pour l'existence de G , 0,25 point par droite (0,75 point), 0,5 point pour la vérification des poids non nuls ; d) 0,25 point pour p et q , 0,5 point pour R , 0,25 point pour le point de concours, 0,5 point pour R' .

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : géométrie affine et barycentres

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Géométrie affine](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [géométrie affine](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).