

Corrigé du contrôle de maths L2 : formes quadratiques, coniques et quadriques

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : loi d'inertie de Sylvester	3,5 points
Exercice 2 : Réduction de Gauss, rang et signature	4,5 points
Exercice 3 : La forme quadratique trace du carré	3,5 points
Exercice 4 : Réduction orthogonale d'une conique	4 points
Exercice 5 : Problème : une famille de quadriques de révolution	4,5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : loi d'inertie de Sylvester (3,5 points)

- a. Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est q -orthogonale lorsque $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour tous $i \neq j$, où φ est la forme polaire de q . Dans une telle base, la matrice de q est diagonale.

Loi d'inertie de Sylvester : dans toute base q -orthogonale, le nombre p de vecteurs tels que $q(e_i) > 0$ et le nombre s de vecteurs tels que $q(e_i) < 0$ ne dépendent pas de la base choisie. Le couple (p, s) est la signature de q . Le rang de q est le rang de sa matrice dans n'importe quelle base ; il vaut $p + s$.

- b. Numérotons les vecteurs pour que $q(e_1), \dots, q(e_p)$ soient strictement positifs. Posons $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, de dimension p .

D'abord, q est définie positive sur F . En effet, si $x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p$ est non nul, l'orthogonalité de la base donne $q(x) = x_1^2 q(e_1) + \dots + x_p^2 q(e_p) > 0$, car au moins un x_i est non nul.

Ensuite, G' est engendré par les $n - p'$ vecteurs e'_i tels que $q(e'_i) \leq 0$; il est donc de dimension $n - p'$. Pour $y = \sum y_i e'_i$ dans G' , on a de même $q(y) = \sum y_i^2 q(e'_i) \leq 0$.

Par conséquent, $F \cap G' = \{0\}$: un vecteur non nul de l'intersection vérifierait à la fois $q(x) > 0$ et $q(x) \leq 0$. La formule de Grassmann donne alors

$$\dim(F + G') = \dim F + \dim G' = p + n - p' \leq \dim E = n,$$

donc $p \leq p'$. Les deux bases jouent des rôles symétriques, donc $p' \leq p$, et ainsi $p = p'$.

Enfin, le nombre de $q(e_i)$ non nuls est le rang de la matrice diagonale de q , qui ne dépend pas de la base. **Le nombre de valeurs strictement négatives vaut donc $\text{rg}(q) - p$ dans toute base q -orthogonale : la signature est bien définie.**

Barème : a) 0,25 point pour la base orthogonale, 0,5 point pour l'énoncé de Sylvester, 0,25 point pour rang et signature ; b) 0,5 point pour q définie positive sur F , 0,5 point pour q négative sur G' et sa dimension, 0,5 point pour l'intersection nulle, 0,5 point pour Grassmann, 0,5 point pour la symétrie et la conclusion sur S .

Exercice 2 : Réduction de Gauss, rang et signature (4,5 points)

- a. Les coefficients diagonaux sont ceux des carrés ; les autres sont la moitié des coefficients des doubles produits :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

La forme polaire est donc

$$\varphi_1((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + 3yy' + 2zz' + (xy' + x'y) - (xz' + x'z) + 3(yz' + y'z).$$

- b. On regroupe d'abord les termes en x : $x^2 + 2x(y - z) = (x + y - z)^2 - (y - z)^2$. Ainsi

$$q_1 = (x + y - z)^2 - y^2 + 2yz - z^2 + 3y^2 + 2z^2 + 6yz = (x + y - z)^2 + 2y^2 + 8yz + z^2.$$

Ensuite, $2y^2 + 8yz = 2(y + 2z)^2 - 8z^2$. On obtient donc

$$q_1(x, y, z) = (x + y - z)^2 + 2(y + 2z)^2 - 7z^2.$$

Les formes linéaires $x + y - z$, $y + 2z$ et z sont indépendantes (système triangulaire).

Vérification : la matrice de passage est triangulaire à diagonale de 1, donc

$\det A_1 = 1 \times 2 \times (-7) = -14$. Directement, en développant selon la première ligne,

$$\det A_1 = 1 \times (6 - 9) - 1 \times (2 + 3) + (-1) \times (3 + 3) = -3 - 5 - 6 = -14.$$

Les deux calculs concordent.

c. La réduction contient deux carrés affectés d'un coefficient positif et un d'un coefficient négatif.

Donc q_1 est de rang 3 et de signature $(2, 1)$. Elle n'est pas positive : par exemple, pour $(x, y, z) = (3, -2, 1)$, on a $x + y - z = 0$, $y + 2z = 0$ et $q_1 = -7 < 0$.

d. La forme q_2 n'a aucun carré. Posons $x = u + v$, $y = u - v$. Alors $xy = u^2 - v^2$ et $z(x + y) = 2uz$, donc

$$q_2 = u^2 + 2uz - v^2 = (u + z)^2 - z^2 - v^2.$$

Avec $u = \frac{x+y}{2}$ et $v = \frac{x-y}{2}$, on obtient

$$q_2(x, y, z) = \left(\frac{x+y}{2} + z\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 - z^2.$$

Ces trois formes linéaires sont indépendantes : leur matrice a pour déterminant $-\frac{1}{2} \neq 0$ (développement selon la dernière ligne $(0, 0, 1)$). **Donc q_2 est de rang 3 et de signature $(1, 2)$.**

e. On cherche un vecteur tel que $q_2 = 0$. Prenons $(x, y, z) = (1, 1, t)$: $q_2 = 1 + 2t$, qui s'annule pour $t = -\frac{1}{2}$. **Le vecteur $(2, 2, -1)$ est isotrope :**
 $q_2(2, 2, -1) = 4 - 2 - 2 = 0$.

Barème : a) 0,25 point pour la matrice, 0,25 point pour la forme polaire ; b) 1 point pour la réduction, 0,5 point pour la vérification par le déterminant ; c) 0,25 point pour rang et signature, 0,25 point pour la non-positivité justifiée ; d) 1 point pour la réduction, 0,5 point pour l'indépendance et la signature ; e) 0,5 point.

Erreur fréquente : conclure sur la signature sans vérifier que les formes linéaires obtenues sont indépendantes ; sinon le rang peut être surestimé.

Exercice 3 : La forme quadratique trace du carré (3,5 points)

- a. La trace est linéaire et le produit matriciel est bilinéaire, donc φ est bilinéaire. De plus, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Ainsi φ est une forme bilinéaire symétrique, de forme quadratique $q(A) = \varphi(A, A)$.

- b. Pour $M = (m_{ij})$, on a $\text{tr}(M^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} m_{ji}$. Si S est symétrique, $s_{ji} = s_{ij}$, donc $q(S) = \sum_{i,j} s_{ij}^2 \geq 0$. Si A est antisymétrique, $a_{ji} = -a_{ij}$, donc $q(A) = -\sum_{i,j} a_{ij}^2 \leq 0$. De plus, ces quantités ne s'annulent que pour la matrice nulle.

- c. Soit $S \in \mathcal{S}_n$ et $A \in \mathcal{A}_n$. Une matrice et sa transposée ont même trace, donc

$$\text{tr}(SA) = \text{tr}((SA)^T) = \text{tr}(A^T S^T) = \text{tr}(-AS) = -\text{tr}(SA).$$

Par conséquent $\varphi(S, A) = 0$: les deux sous-espaces sont φ -orthogonaux.

- d. Notons E_{ij} les matrices élémentaires. On a $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$, d'où

$\text{tr}(E_{ij} E_{kl}) = \delta_{jk} \delta_{il}$. Considérons la famille formée :

- des E_{ii} , pour $1 \leq i \leq n$, avec $q(E_{ii}) = 1$;
- des $E_{ij} + E_{ji}$, pour $i < j$, avec $q = \text{tr}(E_{ii} + E_{jj}) = 2$;
- des $E_{ij} - E_{ji}$, pour $i < j$, avec $q = \text{tr}(-E_{ii} - E_{jj}) = -2$.

C'est une base de E , réunion d'une base de $\mathcal{S}_n$ et d'une base de $\mathcal{A}_n$. Elle est q -orthogonale : la formule $\text{tr}(E_{ij} E_{kl}) = \delta_{jk} \delta_{il}$ montre que deux éléments construits sur des paires d'indices différentes sont orthogonaux, et la question c) traite les paires symétrique-antisymétrique.

Il y a $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ vecteurs de carré positif et $\frac{n(n-1)}{2}$ de carré négatif, aucun de carré nul. **Donc q est de rang n^2 et de signature $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$.**

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point par cas ; c) 0,5 point ; d) 0,75 point pour la base q -orthogonale justifiée, 0,5 point pour le décompte, 0,25 point pour rang et signature.

Exercice 4 : Réduction orthogonale d'une conique (4 points)

a. La partie quadratique a pour matrice

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \chi_M(\lambda) = (5 - \lambda)^2 - 9 = (\lambda - 2)(\lambda - 8).$$

Ensuite, $M(1,1)^T = (2, 2)^T$ et $M(1, -1)^T = (8, -8)^T$. **Les valeurs propres sont 2 et 8, et $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ forment une base orthonormée de vecteurs propres**, conformément au théorème spectral.

b. Notons $f(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4$. Un centre annule le gradient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x - 6y - 4 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 10y - 4 = 0.$$

La différence des deux équations donne $16x - 16y = 0$, donc $x = y$, puis $4x - 4 = 0$. Le déterminant du système, $\det(2M) = 64$, est non nul. **Le centre est unique : $O(1, 1)$.**

c. En développant,

$5(x-1)^2 - 6(x-1)(y-1) + 5(y-1)^2 = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y + 4$. L'équation s'écrit donc

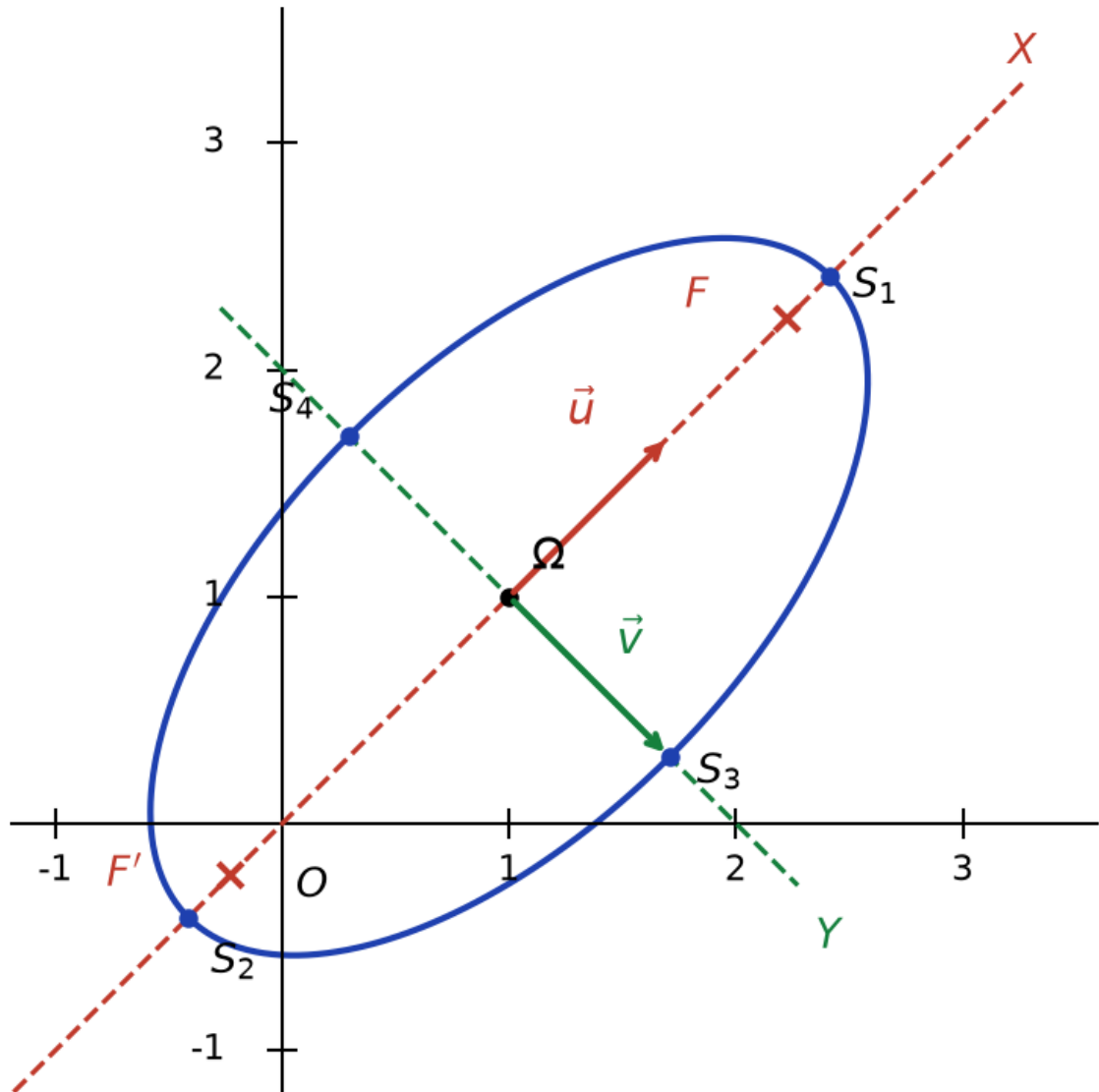
$$5(x-1)^2 - 6(x-1)(y-1) + 5(y-1)^2 = 8.$$

Posons $(x, y) = O + X\vec{u} + Y\vec{v}$. Comme la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est orthonormée et propre, la partie quadratique devient $2X^2 + 8Y^2$. Ainsi

$$2X^2 + 8Y^2 = 8 \Leftrightarrow \frac{X^2}{4} + Y^2 = 1.$$

La courbe $\mathcal{C}$ est une ellipse de centre $O(1, 1)$, de demi-grand axe 2 porté par $\vec{u}$ et de demi-petit axe 1 porté par $\vec{v}$. Sa demi-distance focale vaut $c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, donc son excentricité est $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les sommets sont $O \pm 2\vec{u}$ et $O \pm \vec{v}$: $S_1(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, $S_2(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$, $S_3(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $S_4(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$. Les foyers sont $(1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}, 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2})$.



Vérification : S_1 donne $X = 2$, $Y = 0$, et $\frac{4}{4} + 0 = 1$.

Barème : a) 0,5 point pour le polynôme caractéristique, 0,5 point pour les valeurs propres, 0,5 point pour la base orthonormée ; b) 0,5 point pour le système, 0,5 point pour la résolution et l'unicité ; c) 0,5 point pour l'équation réduite, 0,5 point pour la nature, les demi-axes et l'excentricité, 0,5 point pour les sommets et le tracé.

Exercice 5 : Problème : une famille de quadriques de révolution (4,5 points)

a. La matrice de q_a est

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} = (1 - a) I_3 + a J.$$

La matrice J est de rang 1 et $J(1, 1, 1)^T = 3(1, 1, 1)^T$. Ses valeurs propres sont donc 3, de vecteur propre $(1, 1, 1)$, et 0, d'espace propre le plan $P_0: x + y + z = 0$. Par conséquent, M_a a pour valeurs propres $1 + 2a$, de vecteur propre $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, et $1 - a$, valeur propre double d'espace propre P_0 . Une base orthonormée de P_0 est $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$.

b. Dans la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{w})$, de coordonnées (X, Y, Z) , on a $q_a = (1 - a)(X^2 + Y^2) + (1 + 2a)Z^2$. Or $1 + 2a > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2}$ et $1 - a > 0 \Leftrightarrow a < 1$. Ainsi :

a	$a < -\frac{1}{2}$	$a = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < a < 1$	$a = 1$	$a > 1$
signature	(2, 1)	(2, 0)	(3, 0)	(1, 0)	(1, 2)

En particulier, q_a est définie positive si et seulement si $-\frac{1}{2} < a < 1$.

c. L'équation de Q_a s'écrit $(1 - a)(X^2 + Y^2) + (1 + 2a)Z^2 = 1$. Les coefficients de X^2 et Y^2 sont égaux, donc toute quadrique non dégénérée obtenue est de révolution autour de l'axe $D = \mathbb{R}(1, 1, 1)$.

- Si $-\frac{1}{2} < a < 1$: **ellipsoïde de révolution d'axe D** , de demi-axes $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+2a}}$; pour $a = 0$, c'est la sphère unité.
- Si $a = -\frac{1}{2}$: $\frac{3}{2}(X^2 + Y^2) = 1$, **cylindre de révolution d'axe D et de rayon $\sqrt{\frac{2}{3}}$** .
- Si $a = 1$: $3Z^2 = 1$, et comme $Z = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$, on obtient **la réunion des deux plans parallèles $x+y+z = 1$ et $x+y+z = -1$** .
- Si $a < -\frac{1}{2}$: un coefficient négatif sur Z^2 , **hyperboloïde de révolution à une nappe d'axe D** .
- Si $a > 1$: deux coefficients négatifs sur X^2 et Y^2 , **hyperboloïde de révolution à deux nappes d'axe D** .

d. Pour $a = 2$, on a $q_2 = 5Z^2 - X^2 - Y^2$. Un point $t(1, 1, 1)$ vérifie $q_2 = 3t^2 + 4 \times 3t^2 = 15t^2$. Donc $q_2 = 1$ pour $t = \pm \frac{1}{\sqrt{15}}$. **Les sommets de $\mathcal{Q}_2$ sont $\pm \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 1, 1)$.**

Sur le plan $x + y + z = 0$, on a $Z = 0$, donc $q_2 = -(X^2 + Y^2) \leq 0$. Ainsi $q_2 = 1$ **est impossible : $\mathcal{Q}_2$ ne rencontre pas ce plan**, ce qui confirme que ses deux nappes sont séparées par lui.

Barème : a) 0,5 point pour les valeurs propres, 0,5 point pour la base orthonormée ; b) 0,5 point pour l'expression réduite, 0,5 point pour le tableau complet ; c) 0,25 point par cas correct (ellipsoïde, cylindre, plans, une nappe, deux nappes), 0,25 point pour l'axe ; d) 0,5 point pour les sommets, 0,5 point pour le plan.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : formes quadratiques, coniques et quadriques

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Formes quadratiques](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [formes quadratiques](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).