Corrigé du contrôle de maths L2 : espaces probabilisés et conditionnement

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : tribus, continuité monotone et Bayes	4 points
Exercice 2 : Lancers infinis et lemme de Borel-Cantelli	4 points
Exercice 3 : Test de dépistage et formule de Bayes	4 points
Exercice 4 : Indépendance deux à deux et mutuelle	3 points
Exercice 5 : Problème : une chaîne d'urnes	5 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Question de cours : tribus, continuité monotone et Bayes (4 points)

a. Une **tribu** sur Ω est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui contient Ω, qui est stable par passage au complémentaire, et stable par réunion dénombrable : si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout n, alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Une **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et qui est σ-additive : pour toute suite (A_n) d'événements deux à deux incompatibles,

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)\ .$$

b. **Énoncé : si (A_n) est croissante pour l'inclusion, alors $P\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$.**

Démonstration. Posons $C_0 = A_0$ et $C_n = A_n \setminus A_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Ces événements sont deux à deux incompatibles. De plus, par croissance, $\bigcup_{k \leq n} C_k = A_n$ et $\bigcup_k C_k = \bigcup_k A_k$.

La σ-additivité donne alors $P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(C_k)$. Cette série converge et sa somme est la limite de ses sommes partielles. Or, par additivité finie, $\sum_{k=0}^{n} P(C_k) = P(A_n)$. **D'où le résultat.**

c. Formule des probabilités totales : pour tout événement B ,

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i)\ P_{A_i}(B).$$

En effet, les $B \cap A_i$ sont deux à deux incompatibles, de réunion B , et $P(B \cap A_i) = P(A_i)\, P_{A_i}(B)$.

Formule de Bayes. Par définition, $P_B(A_j) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$. Le numérateur vaut $P(A_j)\, P_{A_j}(B)$, et le dénominateur se développe par la formule précédente. **Ainsi :**

$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j)\ P_{A_j}(B)}{\sum_{i \in I} P(A_i)\ P_{A_i}(B)}.$$

Barème : a) 0,5 point par définition ; b) 0,5 point pour l'énoncé, 1 point pour la démonstration (découpage en événements disjoints, σ-additivité) ; c) 0,5 point pour les probabilités totales, 1 point pour Bayes démontrée.

Exercice 2 : Lancers infinis et lemme de Borel-Cantelli (4 points)

a. L'événement A_n est l'intersection des événements « le lancer k donne pile », pour $1 \leq k \leq n$. Ces événements sont indépendants, de probabilité $\frac{1}{2}$. **Donc** $P(A_n) = \frac{1}{2^n}$**.**

b. L'événement « on n'obtient que des piles » est $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$. La suite (A_n) est décroissante : si les $n+1$ premiers lancers donnent pile, les n premiers aussi.

Par continuité décroissante de P, $P(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n}$. **Donc** $P(A) = 0$ **.**

c. L'événement « on obtient au moins une fois face » est le contraire de A. **Sa probabilité vaut donc** $1 - 0 = 1$ **: c'est un événement presque sûr.**

d. Pour tout n, on a $L \subset \bigcup_{k \geq n} E_k$. Par croissance et sous-additivité dénombrable de P :

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$0 \leq P(L) \leq P\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(E_k).$$

Le majorant est le reste d'une série convergente : il tend vers 0 quand $n \to +\infty$. **Donc $P(L) = 0$.**

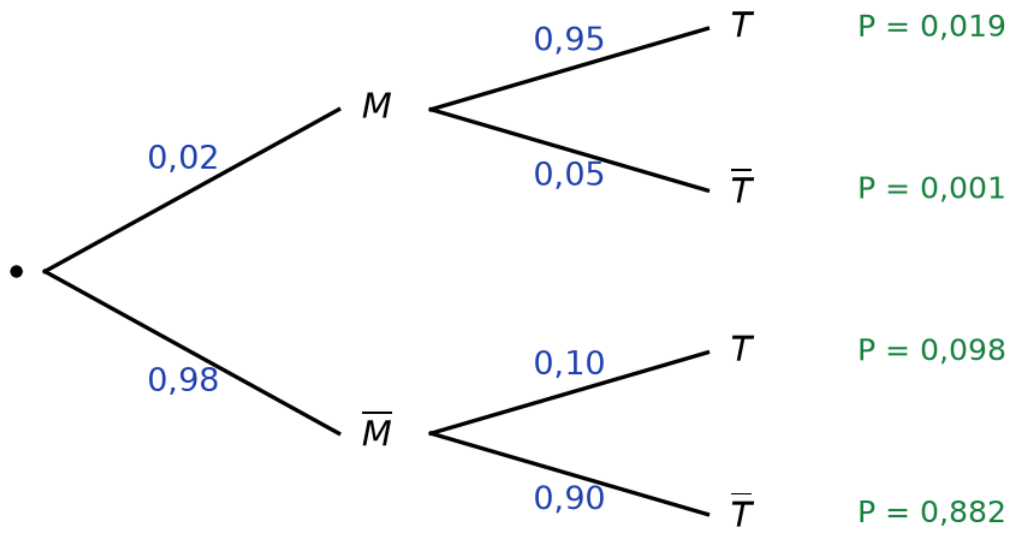
Application. L'événement E_n porte sur les $n+1$ lancers numéros n à $2n$, indépendants. Ainsi $P(E_n) = \frac{1}{2^{n+1}}$, terme général d'une série géométrique convergente. Le lemme donne $P(L) = 0$.

Interprétation : presque sûrement, seuls un nombre fini d'événements E_n se réalisent. Autrement dit, il existe presque sûrement un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, l'un au moins des lancers numéros n à $2n$ donne face.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour l'écriture de A, 0,5 point pour la continuité décroissante citée ; c) 0,5 point ; d) 1 point pour la démonstration du lemme, 0,5 point pour le calcul de P(E_n) et la convergence, 0,5 point pour l'interprétation.

Exercice 3 : Test de dépistage et formule de Bayes (4 points)

a. L'énoncé donne $P(M) = 0{,}02$, $P_M(T) = 0{,}95$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}90$, donc $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}10$.



Le couple $(M, \overline{M})$ est un système complet. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = 0{,}02 \times 0{,}95 + 0{,}98 \times 0{,}10 = 0{,}019 + 0{,}098.$$

Donc $P(T) = 0{,}117$**.**

b. Par la formule de Bayes, $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}019}{0{,}117} = \frac{19}{117}$.

Or $\frac{19}{117} < \frac{1}{6}$ équivaut à $114 < 117$, ce qui est vrai. **Ainsi** $P_T(M) = \frac{19}{117} < \frac{1}{6}$ **: un test positif isolé laisse moins d'une chance sur six d'être malade.**

c. Par indépendance conditionnelle, $P_M(T_1 \cap T_2) = 0{,}95^2 = 0{,}9025$ et $P_{\overline{M}}(T_1 \cap T_2) = 0{,}1^2 = 0{,}01$. Donc :

$$P(M \cap T_1 \cap T_2) = 0{,}02 \times 0{,}9025 = 0{,}01805, \quad P(\overline{M} \cap T_1 \cap T_2) = 0{,}98 \times 0{,}01 = 0{,}0098.$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Par les probabilités totales, $P(T_1 \cap T_2) = 0{,}02785$. Ensuite, la formule de Bayes donne :

$$P_{T_1 \cap T_2}(M) = \frac{0{,}01805}{0{,}02785} = \frac{1805}{2785} = \frac{361}{557}.$$

Comme $2 \times 361 = 722 > 557$, **cette probabilité vaut** $\frac{361}{557}$**, environ** $0{,}65$**, et dépasse** $\frac{1}{2}$**.**

d. Les deux tests ont la même loi, donc $P(T_2) = P(T_1) = 0{,}117$. Or $P(T_1)P(T_2) = 0{,}013689$, alors que $P(T_1 \cap T_2) = 0{,}02785$. **Les événements** T_1 **et** T_2 **ne sont donc pas indépendants**, bien qu'ils le soient conditionnellement à M et à $\overline{M}$.

Erreur fréquente : confondre $P_M(T) = 0{,}95$ et $P_T(M)$. La faible prévalence rend $P_T(M)$ beaucoup plus petite.

Barème : a) 0,5 point pour l'arbre, 0,5 point pour P(T) ; b) 0,5 point pour Bayes, 0,5 point pour la comparaison ; c) 0,5 point pour les probabilités conditionnelles, 0,5 point pour P(T₁ ∩ T₂), 0,5 point pour le résultat et la comparaison ; d) 0,5 point.

Exercice 4 : Indépendance deux à deux et mutuelle (3 points)

a. On prend $\Omega = \{1, 2, \ldots 1., 6\}^2$, la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et la probabilité uniforme. **Chacun des** 36 **résultats a la probabilité** $\frac{1}{36}$**.**

b. L'événement A contient $3 \times 6 = 18$ couples, donc $P(A) = \frac{1}{2}$; de même $P(B) = \frac{1}{2}$.

La somme est paire si et seulement si les deux dés ont la même parité : C contient $9+9=18$ couples, donc $P(C)=\frac{1}{2}$.

Ensuite, $A\cap B$ contient 9 couples, donc $P(A\cap B)=\frac{1}{4}=P(A)P(B)$. De plus, $A\cap C$ signifie « les deux dés sont pairs », donc $A\cap C=A\cap B$ et $P(A\cap C)=\frac{1}{4}=P(A)P(C)$. De même, $P(B\cap C)=\frac{1}{4}=P(B)P(C)$. **Les trois événements sont indépendants deux à deux.**

c. On a $A\cap B\cap C=A\cap B$, donc $P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{4}$, alors que $P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$. **Les événements ne sont donc pas mutuellement indépendants.**

d. Les événements $E\cap F$ et $E\cap\overline{F}$ sont incompatibles, de réunion E. Donc $P(E\cap\overline{F})=P(E)-P(E\cap F)$. Par indépendance, $P(E\cap F)=P(E)P(F)$. Par conséquent :

$$P(E\cap\overline{F})=P(E)\big(1-P(F)\big)=P(E)\,P(\overline{F}).$$

Ainsi E et $\overline{F}$ sont indépendants.

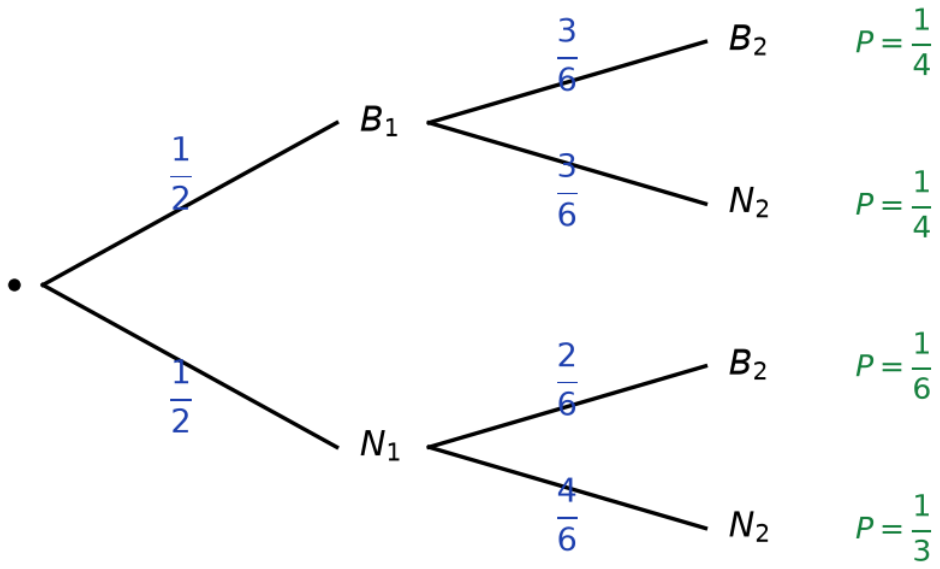
Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour les trois probabilités, 0,5 point pour les trois égalités ; c) 0,5 point ; d) 0,5 point pour la décomposition de E, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 5 : Problème : une chaîne d'urnes (5 points)

a. Si la première boule est blanche, U_2 contient alors trois blanches et trois noires :

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$P_{B_1}(B_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Si elle est noire, U_2 contient deux blanches et quatre noires : $P_{N_1}(B_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.



Par la formule des probabilités totales avec le système complet (B_1, N_1) :

$$p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}.$$

Donc $p_2 = \frac{5}{12}$ **.**

b. Soit $n \geq 1$. Sachant B_n , l'urne U_{n+1} contient trois blanches sur six boules ; sachant N_n , elle en contient deux sur six. Ainsi $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$ et $P_{N_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3}$. Si $p_n \in]0,1[$, le couple (B_n, N_n) est un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors :

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}\, p_n + \frac{1}{3}(1 - p_n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\, p_n.$$

Or $p_1 = \frac{1}{2}$, et la relation montre par récurrence que $p_n \in]0,1[$ pour tout n. **La relation est donc établie pour tout** $n \geq 1$ **.**

c. La suite est arithmético-géométrique. Son point fixe vérifie $\ell = \frac{1}{3} + \frac{\ell}{6}$, soit $\ell = \frac{2}{5}$. Posons $q_n = p_n - \frac{2}{5}$. Alors $q_{n+1} = \frac{1}{6} q_n$, donc (q_n) est géométrique de raison $\frac{1}{6}$, avec $q_1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.

$$p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

Comme $\left|\frac{1}{6}\right| < 1$, **la suite** (p_n) **converge vers** $\frac{2}{5}$**.** On vérifie que $p_2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{60} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$.

d. Par la formule de Bayes :

$$P_{B_2}(B_1) = \frac{P(B_1)\ P_{B_1}(B_2)}{p_2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}.$$

La probabilité cherchée vaut $\frac{3}{5}$**.**

e. D'après l'hypothèse de l'énoncé, $P_{B_1 \cap \ldots \cap B_k}(B_{k+1}) = P_{B_k}(B_{k+1}) = \frac{1}{2}$. La formule des probabilités composées donne alors :

$$P(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = P(B_1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}.$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Les événements $C_n = B_1 \cap \ldots \cap B_n$ forment une suite décroissante, d'intersection « toutes les boules tirées sont blanches ». Par continuité décroissante, cette probabilité vaut $\lim \frac{1}{2^n}$. **La probabilité que toutes les boules tirées soient blanches est nulle.**

Barème : a) 0,5 point pour les deux probabilités conditionnelles, 0,5 point pour p_2 ; b) 0,5 point pour les probabilités conditionnelles, 0,5 point pour la formule des probabilités totales justifiée ; c) 0,5 point pour le point fixe, 0,5 point pour la suite géométrique, 0,5 point pour la formule et la limite ; d) 0,5 point ; e) 0,5 point pour les probabilités composées, 0,5 point pour la continuité décroissante.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : espaces probabilisés et conditionnement

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Espaces probabilisés » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** espaces probabilisés.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L2** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.