Corrigé du contrôle de maths L2 : différentiabilité, Taylor et extrema

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : différentiabilité et Taylor-Young	3 points
Exercice 2 : Continuité, dérivées partielles et différentiabilité en l'origine	4 points
Exercice 3 : Règle de la chaîne et équation aux dérivées partielles	4 points
Exercice 4 : Points critiques et matrice hessienne	3,5 points
Exercice 5 : Problème : boîte ouverte de surface minimale	5,5 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Question de cours : différentiabilité et Taylor-Young (3 points)

a. La fonction f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et une fonction ε, définie au voisinage de 0, telles que $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$ et

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + |h|\ \varepsilon(h).$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

L'application L est alors unique : c'est la différentielle $\mathrm{d}f(a)$.

Supposons f différentiable en a . En dimension finie, toute application linéaire est continue ; il existe donc $C \geq 0$ tel que $|L(h)| \leq C\,|h|$. Par conséquent, $|f(a+h) - f(a)| \leq C|h| + |h|\ |\varepsilon(h)|$, et ce majorant tend vers 0 quand $h \to 0$. **Ainsi $f(a+h) \to f(a)$: f est continue en a .**

b. Comme f est de classe C^2 , la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + \langle\ \nabla\ f(a), h\ \rangle + \tfrac{1}{2}\ {}^t h\ H_f(a)\ h + |h|^2\,\varepsilon(h), \quad quad \quad varepsilon(h) \to 0.$$

Ici a est critique, donc $\nabla\, f(a) = 0$. La fonction q est continue et strictement positive sur le cercle unité S , qui est fermé et borné, donc compact. Elle y atteint donc son minimum m , et $m > 0$. Par homogénéité, $q(h) = |h|^2\, q\left(\frac{h}{|h|}\right) \geq m\ |h|^2$ pour tout $h \neq 0$.

On en déduit $f(a+h) - f(a) \geq |h|^2 \left(\frac{m}{2} - |\varepsilon(h)|\right)$. Choisissons $\delta > 0$ tel que $|\varepsilon(h)| \leq \frac{m}{4}$ pour $|h| < \delta$. Alors, pour $0 < |h| < \delta$, on a $f(a+h) - f(a) \geq \frac{m}{4}|h|^2 > 0$. **Donc f admet en a un minimum local strict.**

Barème : a) 0,5 point pour la définition, 1 point pour la preuve de la continuité (continuité de L citée) ; b) 0,5 point pour la formule de Taylor-Young, 1 point pour la minoration de q par compacité du cercle et la conclusion.

Exercice 2 : Continuité, dérivées partielles et différentiabilité en l'origine (4 points)

a. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$. Donc $|f(x,y)| \leq |x| \leq |(x,y)|$. Ce majorant tend vers 0 quand $(x,y) \to (0,0)$. **Par conséquent,** $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ **:** f **est continue en** $(0,0)$**.**

b. Pour $t \neq 0$, $f(t,0) = 0$, donc $\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$. De même, $f(0,t) = 0$. **Ainsi** $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ **et** $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$**.**

c. Raisonnons par l'absurde. Si f était différentiable en $(0,0)$, sa différentielle aurait pour matrice le gradient, c'est-à-dire $(0 \quad 0)$. On aurait donc $\frac{f(h)}{|h|} \to 0$ quand $h \to 0$.

Or, pour $h = (t,t)$ avec $t > 0$: $f(t,t) = \frac{t^3}{2t^2} = \frac{t}{2}$ et $|h| = \sqrt{2}\, t$. Le quotient vaut donc $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, qui ne tend pas vers 0. **C'est une contradiction :** f **n'est pas différentiable en** $(0,0)$**.**

d. D'abord, $(x^2 - y^2)^2 \geq 0$ donne $4x^2y^2 \leq (x^2+y^2)^2$. Pour $h = (x,y) \neq 0$, on a donc

$$|g(x,y)| \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{4(x^2+y^2)} = \frac{|h|^2}{4}.$$

Ainsi $g(h) = g(0,0) + 0 + |h|\,\varepsilon(h)$ avec $|\varepsilon(h)| \leq \frac{|h|}{4} \to 0$. **Donc** g **est différentiable en** $(0,0)$ **et** $dg(0,0)$ **est l'application nulle.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Erreur fréquente : conclure à la différentiabilité de f parce que ses dérivées partielles existent en $(0,0)$. L'exemple de f montre que cela ne suffit pas.

Barème : a) 1 point (0,5 pour la majoration, 0,5 pour la conclusion) ; b) 1 point (0,5 par dérivée partielle) ; c) 0,5 point pour identifier la seule différentielle possible, 0,5 point pour le chemin (t, t) ; d) 0,5 point pour la majoration, 0,5 point pour la conclusion avec la différentielle nulle.

Exercice 3 : Règle de la chaîne et équation aux dérivées partielles (4 points)

a. L'application φ est linéaire, de matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, de déterminant $-2 \neq 0$. Elle est donc bijective. Résolvons $u = x+y$, $v = x-y$: on obtient $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2}$.

Ainsi $\varphi^{-1}(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$**.** Les applications φ et φ^{-1} sont linéaires, donc de classe C^1 (et même C^∞).

b. La fonction $g = f \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^1 comme composée de fonctions C^1. De plus, $f = g \circ \varphi$. La règle de la chaîne donne, en notant $(u,v) = \varphi(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) \times 1 + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \times 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v).$$

Par différence, $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial g}{\partial v}(x+y, x-y)$. Comme φ est surjective, (E) équivaut à :

$$\text{pour tout } (u,v) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = u.$$

c. Posons $k(u,v) = g(u,v) - uv$. Alors $\frac{\partial k}{\partial v} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$. À u fixé, la fonction $v \to k(u,v)$ est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$, de dérivée nulle : elle est donc constante. Ainsi $k(u,v) = k(u,0) = h(u)$, où $h(u) = g(u,0)$ définit une fonction de classe C^1.

Réciproquement, pour toute h de classe C^1, la fonction $g(u,v) = uv + h(u)$ vérifie $\frac{\partial g}{\partial v} = u$. En revenant à f, on obtient $f(x,y) = (x+y)(x-y) + h(x+y)$.

Les solutions de (E) sont les fonctions $f(x,y) = x^2 - y^2 + h(x+y)$, où h décrit l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Vérification : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + h'(x+y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + h'(x+y)$, dont la différence vaut bien $2x + 2y$.

d. La condition donne $x^2 + h(x) = 0$ pour tout x, donc $h(x) = -x^2$. Alors $f(x,y) = x^2 - y^2 - (x+y)^2$. **La solution cherchée est $f(x,y) = -2xy - 2y^2$.**

Barème : a) 0,5 point pour la bijectivité, 0,5 point pour la réciproque et la régularité ; b) 1 point pour la règle de la chaîne, 0,5 point pour l'équation en g (surjectivité citée) ; c) 0,5 point pour l'intégration à u fixé, 0,5 point pour la réciproque et la forme finale ; d) 0,5 point.

Exercice 4 : Points critiques et matrice hessienne (3,5 points)

a. La fonction f est polynomiale, donc de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Ses dérivées partielles sont $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$.

Un point critique vérifie $y = x^2$ et $x = y^2$. Donc $x = x^4$, soit $x(x^3 - 1) = 0$, d'où

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$x = 0$ ou $x = 1$. **Les points critiques sont** $(0,0)$ **et** $(1,1)$ **.**

b. On a $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$.

En $(0,0)$: $rt - s^2 = 0 - 9 = -9 < 0$. **Le point** $(0,0)$ **est un point col : ce n'est pas un extremum local.**

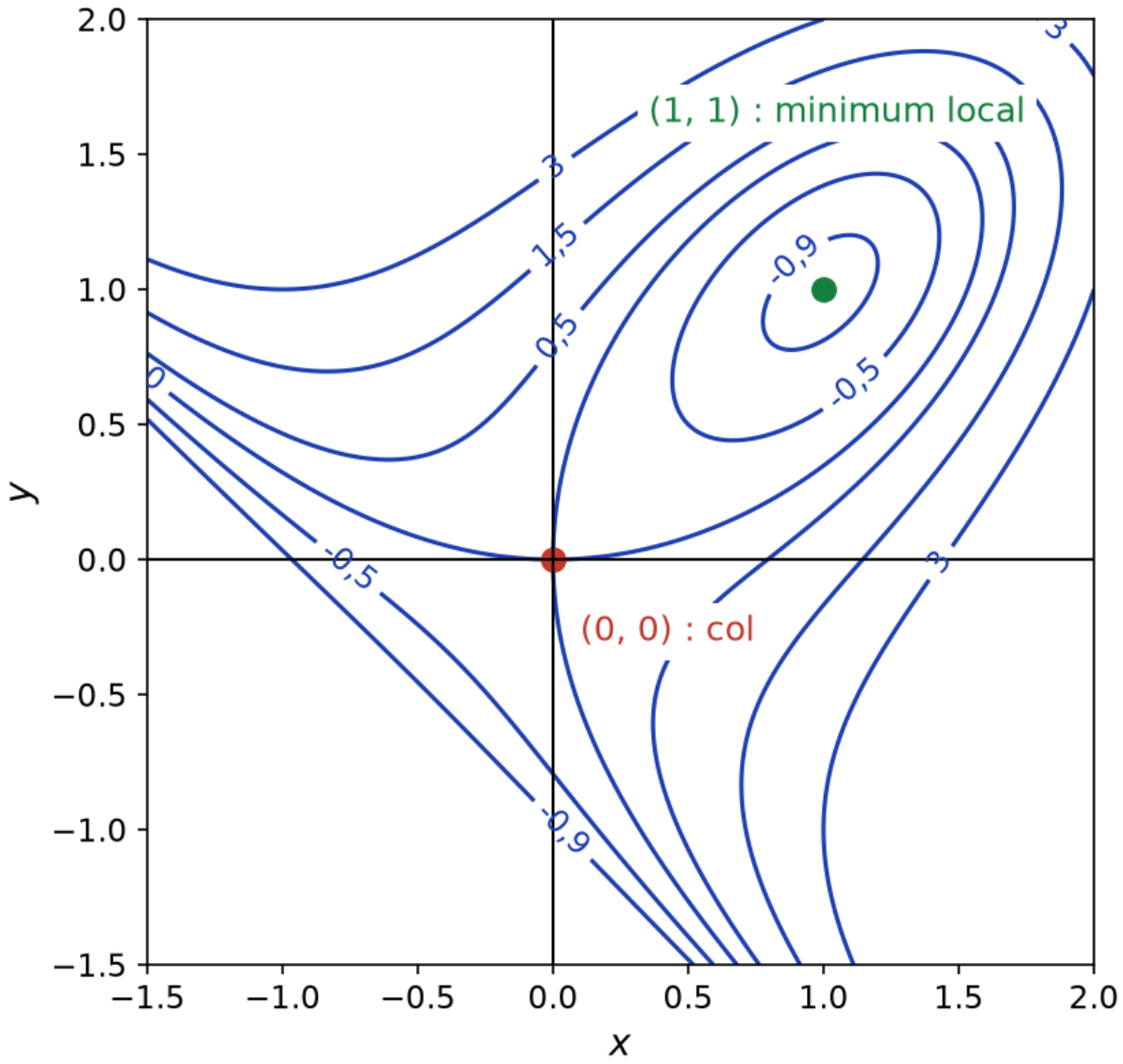
En $(1,1)$: $rt - s^2 = 36 - 9 = 27 > 0$ et $r = 6 > 0$. **La fonction** f **admet donc en** $(1,1)$ **un minimum local strict, égal à** $f(1,1) = -1$ **.**

c. En développant,
$f(1+h, 1+k) = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 + 1 + 3k + 3k^2 + k^3 - 3(1 + h + k + hk)$. Après simplification :

$$f(1+h,1+k) = -1 + 3h^2 - 3hk + 3k^2 + h^3 + k^3.$$

La formule de Taylor-Young donne la partie d'ordre 2 :
$\frac{1}{2}(r\,h^2 + 2s\,hk + t\,k^2) = 3h^2 - 3hk + 3k^2$. Le reste $h^3 + k^3$ est bien négligeable devant $h^2 + k^2$. **Les deux écritures coïncident.** De plus,
$3h^2 - 3hk + 3k^2 = 3\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}k^2$ est définie positive.

d. On a $f(x,0) = x^3$, qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$. **Donc** f **n'est ni majorée ni minorée : elle n'a aucun extremum global.**



Barème : a) 0,5 point pour le système, 0,5 point pour sa résolution ; b) 0,5 point pour r, s, t, 0,5 point par point critique ; c) 0,5 point ; d) 0,5 point avec une restriction explicite.

Exercice 5 : Problème : boîte ouverte de surface minimale (5,5 points)

a. Le volume vaut $xyz = 32$, donc $z = \frac{32}{xy}$. La boîte a un fond d'aire xy, deux faces d'aire xz et deux faces d'aire yz. Donc

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$S = xy + 2xz + 2yz = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}.$$

b. Les fonctions $(x,y) \to xy$, $\frac{64}{x}$ et $\frac{64}{y}$ sont rationnelles, à dénominateurs non nuls sur U. **Donc S est de classe C^2 sur l'ouvert U.**

On a $\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2}$ et $\frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2}$. Un point critique vérifie $x^2 y = 64$ et $x y^2 = 64$. En divisant, $\frac{x}{y} = 1$, donc $x = y$, puis $x^3 = 64$, soit $x = 4$. **Le seul point critique est $(4,4)$.**

c. On a $r = \frac{128}{x^3}$, $s = 1$ et $t = \frac{128}{y^3}$. En $(4,4)$: $r = t = 2$ et $s = 1$, donc

$$H_S(4,4) = \left([\text{ray?}] \begin{matrix} 2 \ \& \ 1 \\ 1 \ \& \ 2 \end{matrix} ,\right), \quad rt - s^2 = 3 > 0, \quad r > 0.$$

Donc S admet en $(4,4)$ un minimum local strict, égal à $S(4,4) = 16 + 16 + 16 = 48$.

d. Soit $(x,y) \in U$ hors de l'intérieur $\left]\frac{4}{3}, 36\right[^2$ de K. Tous les termes de S sont positifs. Trois cas se présentent.

Si $x \leq \frac{4}{3}$, alors $S(x,y) \geq \frac{64}{x} \geq 64 \times \frac{3}{4} = 48$. De même si $y \leq \frac{4}{3}$.

Sinon, $x > \frac{4}{3}$, $y > \frac{4}{3}$, et l'une des coordonnées est au moins 36. Alors $S(x,y) \geq xy \geq 36 \times \frac{4}{3} = 48$. **Dans tous les cas, $S(x,y) \geq 48$.**

e. La partie K est fermée et bornée dans $\mathbb{R}^2$, donc compacte ; elle est incluse dans U. La fonction S est continue sur K. D'après le théorème des bornes atteintes, S atteint sur K

un minimum m en un point p_0. Comme $(4,4) \in K$, on a $m \leq 48$.

Si p_0 est sur la frontière de K, la question d) donne $m \geq 48$, donc $m = 48$. Si p_0 est intérieur à K, c'est un minimum local de S sur un ouvert : p_0 est un point critique, donc $p_0 = (4,4)$ et $m = 48$.

Enfin, tout point de U est soit dans K (et $S \geq m = 48$), soit hors de l'intérieur de K (et $S \geq 48$ par d). **Ainsi S admet sur U un minimum global égal à 48, atteint en $(4,4)$.**

La hauteur vaut alors $z = \frac{32}{16} = 2$. **La boîte optimale mesure $4\,\mathrm{dm} \times 4\,\mathrm{dm}$ de base et $2\,\mathrm{dm}$ de haut ; elle utilise $48\,\mathrm{dm}^2$ de matière.**

Erreur fréquente : conclure au minimum global à partir du seul signe de $rt - s^2$. La hessienne ne donne qu'une information locale ; l'argument de compacité est indispensable.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour la régularité, 1 point pour la résolution du système ; c) 0,5 point pour la hessienne, 0,5 point pour la conclusion ; d) 0,5 point par cas traité ; e) 0,5 point pour la compacité et les bornes atteintes, 0,5 point pour la discussion frontière ou intérieur, 0,5 point pour les dimensions et l'aire.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : différentiabilité, Taylor et extrema

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Différentielle et extrema » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** différentielle et extrema.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L2** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- Contrôle de maths L2 : partiel de S3, fonctions de deux variables