Corrigé du contrôle de maths L2 : convergence uniforme des séries de fonctions

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : convergence uniforme et interversions	4 points
Exercice 2 : La suite de fonctions x puissance n	4 points
Exercice 3 : Une bosse qui glisse vers l'origine	4 points
Exercice 4 : Série de fonctions et convergence normale	3,5 points
Exercice 5 : Problème : la fonction zêta de Riemann	4,5 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Question de cours : convergence uniforme et interversions (4 points)

a. **Convergence simple :** pour tout $x \in I$, la suite réelle $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.

Convergence uniforme : les fonctions $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang, et $|f_n - f|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Le rang N ne dépend pas de x.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. Soit $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme, il existe un rang N tel que $|f_N - f|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Ensuite, f_N est continue en x_0 : il existe $\eta > 0$ tel que, pour $x \in I$ avec $|x - x_0| \leq \eta$, on ait $|f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Pour un tel x, l'inégalité triangulaire donne :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \leq \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Donc f est continue en x_0, et ce pour tout $x_0 \in I$.

c. Par linéarité et croissance de l'intégrale sur le segment $[a,b]$:

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq (b-a)|f_n - f|_\infty.$$

Le majorant tend vers 0. **D'où la convergence des intégrales.**

Barème : a) 0,5 point par définition ; b) 0,5 point pour le choix de N, 0,5 point pour la continuité de f_N, 1 point pour l'inégalité en trois termes ; c) 1 point.

Exercice 2 : La suite de fonctions x puissance n (4 points)

a. Pour $x \in [0,1[$, $x^n \to 0$; pour $x = 1$, $x^n = 1$. **La limite simple est f, nulle sur**

$[0,1[$ **et égale à** 1 **en** 1 **.**

b. **Non, la convergence n'est pas uniforme sur** $[0,1]$ **.**

Première justification : les f_n sont continues, mais f ne l'est pas en 1. Or une limite uniforme de fonctions continues est continue (question 1 b).

Seconde justification : $|f_n - f|_\infty = \sup_{x \in [0,1[} x^n = 1$, car $x^n \to 1$ quand $x \to 1^-$. Cette norme ne tend pas vers 0.

c. La fonction f_n est croissante sur $[0,a]$, où f est nulle. Donc $|f_n - f|_{\infty,[0,a]} = a^n$. Comme $0 < a < 1$, $a^n \to 0$. **La convergence est uniforme sur** $[0,a]$ **.**

d. On a $\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$, et $\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = 0$, car f est nulle sauf en un point. **Les deux valeurs coïncident, bien que la convergence ne soit pas uniforme.** La convergence uniforme est donc une condition suffisante, mais pas nécessaire, pour intervertir limite et intégrale.

e. La fonction g_n est positive et dérivable. Pour $n \geq 1$, $g_n'(x) = n\,x^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}\big(n - (n+1)x\big)$. Ainsi g_n croît sur $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ et décroît ensuite. Donc :

$$|g_n|_\infty = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ce majorant tend vers 0. **Donc** (g_n) **converge uniformément vers** 0 **sur** $[0,1]$ **.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Erreur fréquente : écrire $\sup_{[0,1]} x^n = 1$ sans enlever le point 1. C'est bien $\sup_{[0,1[} x^n$ qui mesure l'écart à f.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point par justification ; c) 0,5 point pour le calcul du sup, 0,5 point pour la limite ; d) 0,5 point ; e) 0,5 point pour les variations, 0,5 point pour la majoration.

Exercice 3 : Une bosse qui glisse vers l'origine (4 points)

a. Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$. Pour $x > 0$, par croissances comparées, $n\,e^{-nx} \to 0$, donc $f_n(x) \to 0$. **La suite converge simplement vers la fonction nulle.**

b. On a $f_n'(x) = n\,e^{-nx}(1 - nx)$. Ainsi f_n croît sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et décroît sur $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$. Elle est positive, donc :

$$\left|f_n\right|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1}.$$

Cette norme ne tend pas vers 0 : la convergence n'est pas uniforme sur $[0,+\infty[$. La figure le montre : chaque bosse a la même hauteur e^{-1} et se déplace vers l'origine.

c. Soit $n \geq \frac{1}{a}$. Alors $\frac{1}{n} \leq a$, donc f_n décroît sur $[a,+\infty[$. Par conséquent, $\sup_{[a,+\infty[} |f_n| = f_n(a) = n\,a\,e^{-na}$, qui tend vers 0 par croissances comparées. **La convergence est uniforme sur $[a,+\infty[$.**

d. On a $h_n(0) = 0$ et, pour $x > 0$, $h_n(x) = n^2\,x\,e^{-nx} \to 0$, toujours par croissances comparées. Donc (h_n) converge simplement vers 0. Calculons l'intégrale avec le changement

de variable $u = nx$:

$$\int_0^1 n^2\, x\, e^{-nx}\, \mathrm{d}x = \int_0^n u\, e^{-u}\, \mathrm{d}u = \left[-(u+1)e^{-u}\right]_0^n = 1 - (n+1)e^{-n}.$$

Cette intégrale tend vers 1 , alors que l'intégrale de la limite simple vaut 0 . On ne peut donc pas intervertir limite et intégrale. C'est cohérent avec la question 1 c) : la convergence de (h_n) n'est pas uniforme sur $[0,1]$, puisque $|h_n|_\infty = \frac{n}{e}$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 0,5 point pour les variations, 0,5 point pour la norme et la conclusion ; c) 1 point ; d) 0,5 point pour la limite simple, 0,5 point pour le calcul de l'intégrale, 0,5 point pour le commentaire.

Exercice 4 : Série de fonctions et convergence normale (3,5 points)

a. Pour $x = 0$, tous les termes sont nuls : $S(0) = 0$. Pour $x > 0$, on reconnaît une série géométrique de raison $e^{-x} \in \left]0,1\right[$, donc convergente :

$$S(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-x}\right)^n = \frac{x\, e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1}.$$

La série converge simplement sur $[0,+\infty[$, avec $S(0) = 0$ et $S(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ pour $x > 0$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. On a $u_n'(x) = e^{-nx}(1-nx)$. Donc u_n, positive, est maximale en $\frac{1}{n}$, et $|u_n|_\infty = \frac{1}{ne}$. **La série $\sum \frac{1}{ne}$ diverge (série harmonique) : il n'y a pas convergence normale sur $[0,+\infty[$.**

c. Pour $n \geq \frac{1}{a}$, u_n décroît sur $[a,+\infty[$, donc $\sup_{[a,+\infty[} |u_n| = a\, e^{-na}$. C'est le terme général d'une série géométrique convergente. **La série converge donc normalement sur $[a,+\infty[$.**

d. Quand $x \to 0^+$, $e^x - 1 \sim x$, donc $S(x) \to 1$. Or $S(0) = 0$. **Ainsi S n'est pas continue en 0.**

Les u_n sont continues sur $[0,+\infty[$. Si la série convergeait uniformément sur cet intervalle, sa somme serait continue, par le théorème de continuité des séries uniformément convergentes. **La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0,+\infty[$.** En revanche, c) montre que S est continue sur $]0,+\infty[$.

Barème : a) 0,5 point pour S(0), 0,5 point pour la somme géométrique ; b) 0,5 point pour la norme, 0,5 point pour la divergence ; c) 0,5 point ; d) 0,5 point pour la limite en 0, 0,5 point pour la conclusion par contraposée.

Exercice 5 : Problème : la fonction zêta de Riemann (4,5 points)

a. Pour $s \geq a$ et $n \geq 1$, on a $0 < \frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^a}$. Donc $\left\|\frac{1}{n^s}\right\|_{\infty,[a,+\infty[} = \frac{1}{n^a}$, terme général d'une série de Riemann convergente car $a > 1$. **La série converge normalement sur $[a,+\infty[$.**

Chaque fonction $s \to n^{-s} = e^{-s\ln n}$ est continue. La convergence normale entraîne la convergence uniforme, donc ζ est continue sur $[a,+\infty[$. Enfin, tout $s > 1$ appartient à un tel

intervalle, par exemple avec $a = \frac{1+s}{2}$. **Ainsi ζ est définie et continue sur $]1,+\infty[$.**

b. Posons $u_n(s) = e^{-s\ln n}$. Chaque u_n est de classe C^1, avec $u_n'(s) = -\frac{\ln n}{n^s}$. Soit $a > 1$ et $b = \frac{1+a}{2}$, de sorte que $1 < b < a$. Sur $[a,+\infty[$, $|u_n'(s)| \leq \frac{\ln n}{n^a}$.

Or $n^b \times \frac{\ln n}{n^a} = \frac{\ln n}{n^{a-b}} \to 0$, donc $\frac{\ln n}{n^a}$ est négligeable devant $\frac{1}{n^b}$, terme général d'une série convergente. Ainsi $\sum u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme (convergence simple de $\sum u_n$, convergence uniforme de $\sum u_n'$), ζ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 1$. **Ainsi ζ est C^1 sur $]1,+\infty[$ et :**

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^s}.$$

Tous les termes sont négatifs, celui d'indice 2 strictement. **Donc $\zeta'(s) < 0$: ζ est strictement décroissante.**

c. Sur $[2,+\infty[$, la série $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, d'après a). De plus, chaque terme a une limite finie en $+\infty$: $u_1(s) = 1$, et $u_n(s) \to 0$ pour $n \geq 2$.

Le théorème de la double limite permet d'intervertir : $\lim\limits_{s \to +\infty} \zeta(s) = 1 + 0 + 0 + \cdots$. **Donc $\zeta(s) \to 1$ quand $s \to +\infty$.**

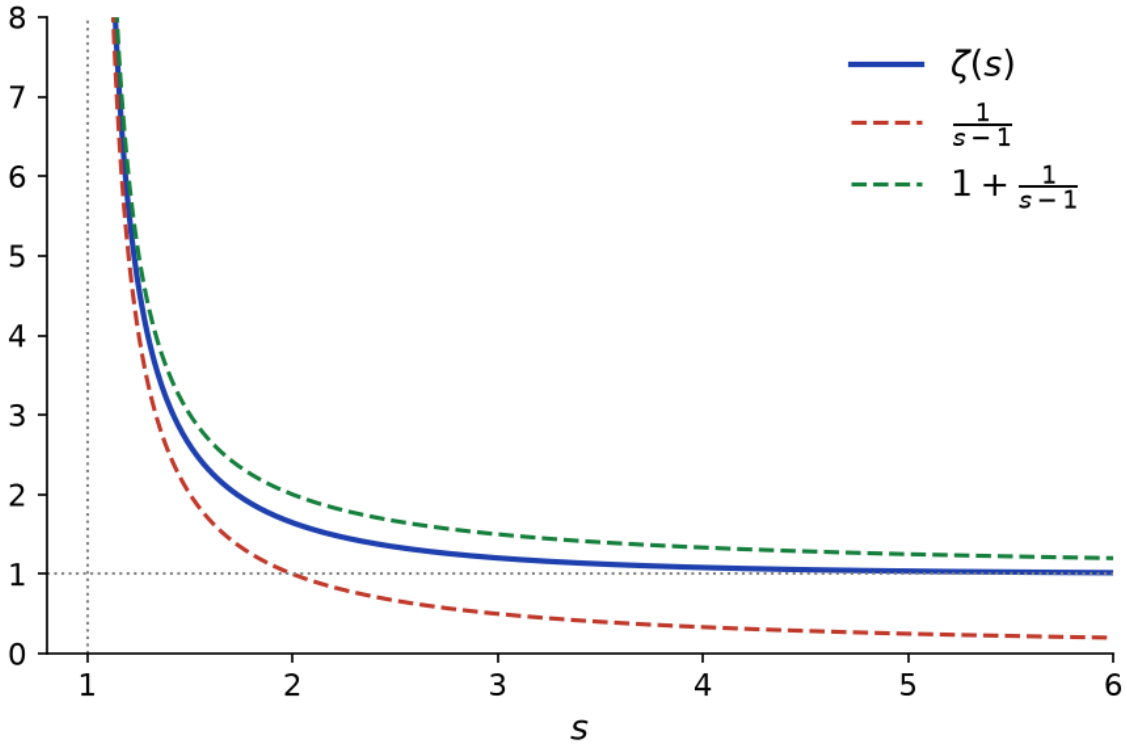
d. La fonction $t \to t^{-s}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$. Pour $n \geq 1$ et $t \in [n, n+1]$, on a $t^{-s} \leq n^{-s}$. En intégrant, $\int_n^{n+1} t^{-s}\,\mathrm{d}t \leq n^{-s}$. En sommant pour $n \geq 1$:

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$\frac{1}{s-1} = \int_1^{+\infty} t^{-s}\,\mathrm{d}t \leq \zeta(s).$$

De même, pour $n \geq 2$ et $t \in [n-1, n]$, $n^{-s} \leq t^{-s}$, donc $n^{-s} \leq \int_{n-1}^{n} t^{-s}\,\mathrm{d}t$. En sommant pour $n \geq 2$, on obtient $\zeta(s) - 1 \leq \frac{1}{s-1}$. **L'encadrement est démontré.**

En multipliant par $s - 1 > 0$: $1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq s$. Par le théorème des gendarmes, $(s-1)\zeta(s) \to 1$ quand $s \to 1^+$. **Donc** $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ **quand** $s \to 1^+$; en particulier, $\zeta(s) \to +\infty$.



Erreur fréquente : affirmer la convergence normale sur $]1, +\infty[$ tout entier. Elle est fausse, car

$\sup_{s>1} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{n}$. Il faut travailler sur $[a,+\infty[$, puis conclure localement.

Barème : a) 0,5 point pour la convergence normale, 0,5 point pour la continuité (argument local) ; b) 0,5 point pour la domination des dérivées, 0,5 point pour le théorème de dérivation cité, 0,5 point pour la monotonie ; c) 0,5 point pour la convergence uniforme sur [2, +∞[, 0,5 point pour la double limite ; d) 0,5 point pour l'encadrement, 0,5 point pour l'équivalent.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : convergence uniforme des séries de fonctions

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Suites et séries de fonctions » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** suites et séries de fonctions.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L2** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.