

Corrigé du contrôle de maths L2 : comparaison série-intégrale et restes

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours, le théorème de comparaison série-intégrale	4 points
Exercice 2 : La constante d'Euler	4 points
Exercice 3 : Deux séries de Bertrand, somme partielle et reste	5 points
Exercice 4 : Problème, la fonction zêta au voisinage de 1	7 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours, le théorème de comparaison série-intégrale (4 points)

a. Soit $k \geq 2$. Pour $t \in [k-1, k]$, la décroissance de f donne $f(k) \leq f(t) \leq f(k-1)$. En intégrant sur un intervalle de longueur 1, $f(k) \leq \int_{k-1}^k f \leq f(k-1)$. De même, pour $k \geq 1$,
$$\int_k^{k+1} f \leq f(k).$$

b. Notons $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ et $F(x) = \int_1^x f$. Ces deux fonctions de n et de x sont

croissantes, car $f \geq 0$. En sommant a) pour k de 2 à n , on obtient

$$S_n - f(1) \leq F(n) \leq S_{n-1}.$$

Si l'intégrale converge, de valeur I , alors $F(n) \leq I$ et $S_n \leq f(1) + I$: la suite croissante (S_n) est majorée, donc la série converge.

Si la série converge, de somme S , alors $F(n) \leq S$; pour $x \geq 1$,

$F(x) \leq F(\lceil x \rceil) \leq S$. La fonction croissante F est majorée, donc elle a une limite finie en $+\infty$. **La série et l'intégrale sont de même nature.**

c. D'après a), $w_n \geq 0$ et $w_n \leq f(n-1) - f(n)$. Par télescopage,

$\sum_{k=2}^n w_k \leq f(1) - f(n) \leq f(1)$. Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum w_n$ sont majorées : $\sum w_n$ **converge**, sans hypothèse sur $\sum f(n)$.

d. L'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ converge d'après b). Pour $N > n \geq 1$, on somme les inégalités

$$\int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f \text{ pour } k \text{ de } n+1 \text{ à } N :$$

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^N f(k) \leq \int_n^N f(t) dt.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, $\int_{n+1}^{+\infty} f \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 0,5 pour l'encadrement de S_n , 0,5 par implication ; c) 1 point (0,5 pour la majoration, 0,5 pour le télescopage) ; d) 1 point (0,5 pour la sommation, 0,5 pour le passage à la limite justifié).

Exercice 2 : La constante d'Euler (4 points)

a. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Ici,

$w_k = \ln k - \ln(k-1) - \frac{1}{k}$. Par télescopage :

$$\sum_{k=2}^n w_k = \ln n - \ln 1 - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \ln n - (H_n - 1).$$

Donc $u_n = H_n - \ln n = 1 - \sum_{k=2}^n w_k$. D'après l'exercice 1 c), la série $\sum w_k$

converge, donc (u_n) converge vers $\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} w_k$.

b. Pour $k \geq 1$, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$. En sommant de 1 à n : $\ln(n+1) \leq H_n$. Ainsi

$u_n \geq \ln(n+1) - \ln n > 0$. De plus, $u_n \leq 1$ car les w_k sont positifs. Par passage à la limite dans les inégalités larges, $0 \leq \gamma \leq 1$. (On a en fait $\gamma \approx 0,577$.)

c. Par définition de la limite, $u_n - \gamma = o(1)$, soit $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$. Alors

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n = \ln(2n) - \ln n + o(1) = \ln 2 + o(1).$$

La limite vaut $\ln 2$.

Barème : a) 1,5 point : 1 pour le calcul télescopique, 0,5 pour la convergence ; b) 1 point (0,5 par inégalité) ; c) 1,5 point : 0,5 pour le développement, 1 pour la limite.

Exercice 3 : Deux séries de Bertrand, somme partielle et reste **(5 points)**

a. La fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{t \ln t}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$, car

$t \rightarrow t \ln t$ est positive et croissante. Or $\int_2^x f = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \rightarrow +\infty$. La série et

l'intégrale ayant même nature, $\sum \frac{1}{n \ln n}$ **diverge**.

b. En sommant $\int_k^{k+1} f \leq f(k)$ pour k de 2 à n : $\int_2^{n+1} f \leq S_n$, soit

$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq S_n$. En sommant $f(k) \leq \int_{k-1}^k f$ pour k de 3 à n :

$S_n - f(2) \leq \int_2^n f$, avec $f(2) = \frac{1}{2 \ln 2}$. **On obtient l'encadrement demandé.** Pour

$n \geq 3$, $\ln(\ln n) > 0$; on divise par ce nombre. La borne de droite tend vers 1, car $\ln(\ln n) \rightarrow +\infty$. Pour celle de gauche,

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) = \ln\left(1 + \frac{\ln(1 + 1/n)}{\ln n}\right) \rightarrow 0,$$

donc elle tend aussi vers 1. Par encadrement, $S_n \sim \ln(\ln n)$: la divergence est extrêmement lente.

c. La fonction $g : t \rightarrow \frac{1}{t(\ln t)^2}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$, de primitive $t \rightarrow -\frac{1}{\ln t}$. Ainsi $\int_x^{+\infty} g = \frac{1}{\ln x}$ pour $x \geq 2$: l'intégrale converge, **donc la série**

converge. L'exercice 1 d) donne, pour $n \geq 2$:

$$\frac{1}{\ln(n+1)} \leq \rho_n \leq \frac{1}{\ln n}.$$

Comme $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \ln n$, les deux bornes sont équivalentes à $\frac{1}{\ln n}$.

Donc $\rho_n \sim \frac{1}{\ln n}$.

Erreur fréquente : conclure que $\ln(\ln(n+1)) \sim \ln(\ln n)$ en « composant les équivalents ». Il faut ici étudier la différence, comme ci-dessus.

Barème : a) 1 point ; b) 2 points : 1 pour l'encadrement, 1 pour l'équivalent ; c) 2 points : 0,5 pour la convergence, 1 pour l'encadrement du reste, 0,5 pour l'équivalent.

Exercice 4 : Problème, la fonction zêta au voisinage de 1 (7 points)

a. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^s}$ converge pour $s > 1$: $\zeta(s)$ existe. La fonction $f : t \rightarrow t^{-s}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, avec $\int_1^{+\infty} f = \frac{1}{s-1}$. En sommant

$\int_k^{k+1} f \leq f(k)$ pour $k \geq 1$, on obtient $\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s)$. En sommant $f(k) \leq \int_{k-1}^k f$ pour $k \geq 2$, on obtient $\zeta(s) - 1 \leq \frac{1}{s-1}$. **D'où** $\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$. En multipliant par $s-1 > 0$, $1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq s$. Par encadrement, $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ **quand** $s \rightarrow 1^+$.

b. Avec $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{(s-1)x^{s-1}}$, l'exercice 1 d) donne $\frac{1}{(s-1)(n+1)^{s-1}} \leq R_n(s) \leq \frac{1}{(s-1)n^{s-1}}$.

c. L'erreur commise est $R_n(2)$, et $\frac{1}{n+1} \leq R_n(2) \leq \frac{1}{n}$. Si $n \geq 1000$,

$R_n(2) \leq \frac{1}{1000} = 10^{-3}$: **l'approximation est bien à 10^{-3} près.** Si $n \leq 998$,

$R_n(2) \geq \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{999} > 10^{-3}$: **la précision n'est pas atteinte.** La convergence est donc lente : il faut environ mille termes pour trois décimales.

d. Pour $t \in [k, k+1]$ et $s \geq 1$, $\frac{1}{(k+1)^s} \leq \frac{1}{t^s} \leq \frac{1}{k^s}$. En intégrant sur $[k, k+1]$, puis en retranchant de $\frac{1}{k^s}$, on obtient $0 \leq d_k(s) \leq \frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}$. Pour $s > 1$, par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^n d_k(s) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^s} \quad [n \rightarrow +\infty] \zeta(s) - \frac{1}{s-1}.$$

Donc $\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k(s).$

e. Pour $s = 1$, $\sum_{k=1}^n d_k(1) = H_n - \ln(n+1) = u_n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Cette quantité tend vers $\gamma - 0$. **Donc** $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k(1) = \gamma$.

f. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $s \in [1, 2]$ et $N \geq 1$, d'après d) et par télescopage :

$$0 \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} d_k(s) \leq \frac{1}{(N+1)^s} \leq \frac{1}{N+1}.$$

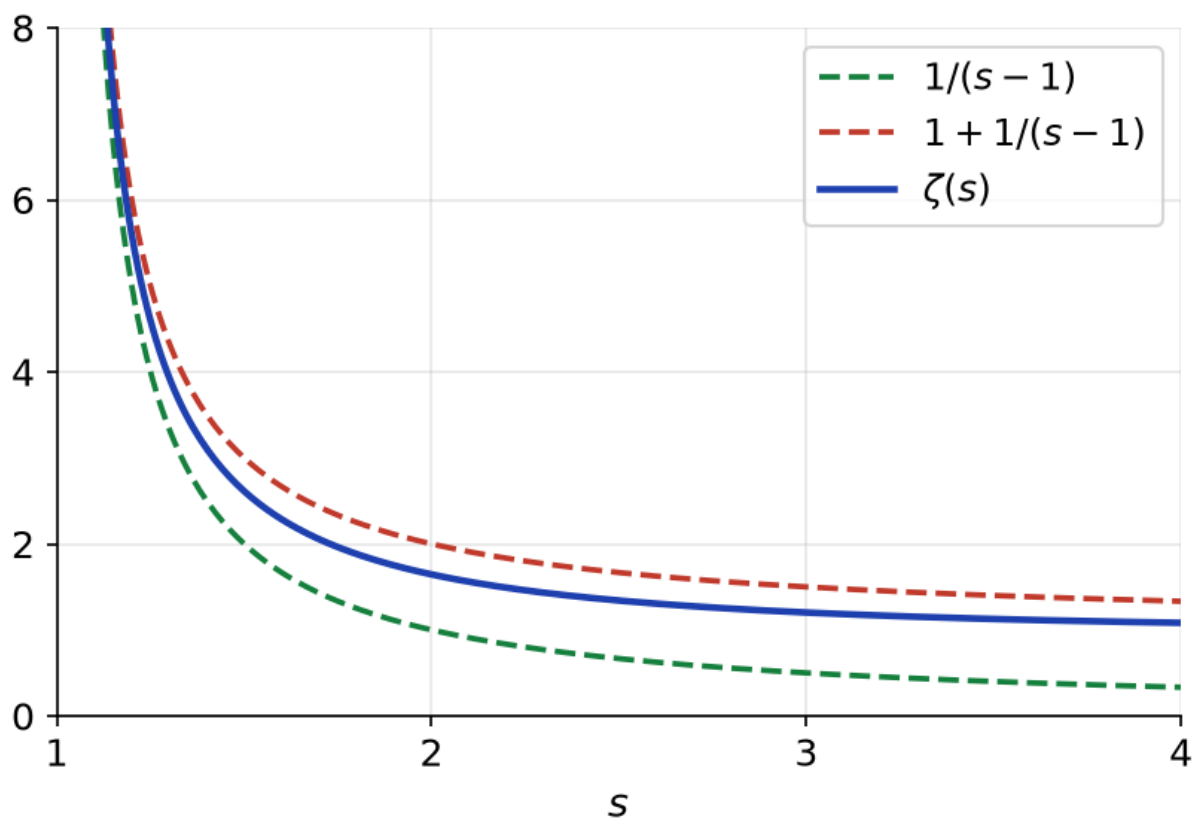
On fixe N tel que $\frac{1}{N+1} \leq \varepsilon$. La somme finie $s \rightarrow \sum_{k=1}^N d_k(s)$ est continue en 1 : il existe

$\eta \in]0, 1]$ tel que, pour $1 < s < 1 + \eta$, $\left| \sum_{k=1}^N d_k(s) - \sum_{k=1}^N d_k(1) \right| \leq \varepsilon$. Pour ces valeurs

de s , l'inégalité triangulaire donne

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} d_k(s) - \gamma \right| \leq \varepsilon + \sum_{k>N} d_k(s) + \sum_{k>N} d_k(1) \leq 3\varepsilon.$$

Ainsi $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ **quand** $s \rightarrow 1^+$. La figure montre ζ entre ses deux bornes de a).



Barème : a) 1,5 point : 1 pour l'encadrement, 0,5 pour l'équivalent ; b) 1 point ; c) 1 point (0,5 par sens) ; d) 1,5 point : 0,5 pour l'encadrement de $d_k(s)$, 1 pour la somme ; e) 0,5 point ; f) 1,5 point : 0,5 pour la majoration uniforme des restes, 0,5 pour la continuité de la somme finie, 0,5 pour la conclusion.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : comparaison série-intégrale et restes

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Séries à termes positifs](#) » en L2 et « [Intégrales généralisées](#) » en L2 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries à termes positifs](#), [intégrales généralisées](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L2 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L2 sur ce thème

- [Contrôle de maths L2 : séries numériques à termes positifs](#)
- [Contrôle de maths L2 : intégrales généralisées et intégrabilité](#)