

Corrigé du contrôle de maths L1 : systèmes linéaires, pivot de Gauss et inverse

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : inverse et transposée d'un produit	3 points
Exercice 2 : Système linéaire à paramètre	5 points
Exercice 3 : Puissances d'une matrice par la formule du binôme	4 points
Exercice 4 : Inverse d'une matrice par la méthode de Gauss-Jordan	3,5 points
Exercice 5 : Problème : matrices triangulaires supérieures	4,5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : inverse et transposée d'un produit (3 points)

- a. **Définition.** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$; cette matrice B est unique et notée A^{-1} .

Si A et B sont inversibles, on calcule, par associativité du produit :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n, \quad (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = I_n.$$

Donc AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- b. Notons $A = (a_{ik})$ et $B = (b_{kj})$. La matrice $(AB)^T$ est de taille $q \times n$. Pour $1 \leq i \leq q$ et $1 \leq j \leq n$, son coefficient d'indice (i, j) est le coefficient (j, i) de AB :

$$[(AB)^T]_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^p a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^p [B^T]_{ik} [A^T]_{kj} = [B^T A^T]_{ij}.$$

Les deux matrices ont même taille et mêmes coefficients : $(AB)^T = B^T A^T$.

Barème : a) 1,5 point (0,5 pour la définition, 1 pour les deux produits) ; b) 1,5 point (0,5 pour les tailles et les notations, 1 pour le calcul du coefficient).

Exercice 2 : Système linéaire à paramètre (5 points)

- a. On garde L_1 comme ligne pivot (coefficient 1 devant x) et on effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - m L_1$:

$$\begin{cases} x + y + m z &= 1 \\ (m-1) y + (1-m) z &= 0 \\ (1-m) y + (1-m^2) z &= 1 - m \end{cases}$$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. Le coefficient de y devient $(1-m) + (m-1) = 0$, celui de z devient $1 - m^2 + 1 - m = 2 - m - m^2 = (1-m)(m+2)$. Ces opérations sont inversibles, donc (S_m) **équivalent au système triangulaire** :

$$\begin{cases} x + y + m z &= 1 \\ (m-1) (y - z) &= 0 \\ (1-m)(m+2) z &= 1 - m \end{cases}$$

b. Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, les pivots 1 , $m - 1$ et $(1-m)(m+2)$ sont non nuls : le système est de Cramer. La dernière ligne donne $z = \frac{1-m}{(1-m)(m+2)} = \frac{1}{m+2}$. La deuxième donne $y = z = \frac{1}{m+2}$. La première donne $x = 1 - \frac{1+m}{m+2} = \frac{1}{m+2}$.

Contrôle dans la première équation : $\frac{1+1+m}{m+2} = 1$. **L'unique solution est**
 $\left(\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}\right)$.

c. Pour $m = 1$, les lignes 2 et 3 du système triangulaire s'écrivent $0 = 0$: il reste la seule équation $x + y + z = 1$. **L'ensemble des solutions de (S_1) est**
 $\{(1 - y - z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$, un plan de $\mathbb{R}^3$.

Pour $m = -2$, la dernière ligne devient $0 \times z = 3$, ce qui est impossible. (S_{-2}) **n'a aucune solution**. On le retrouve en additionnant les trois équations : $(m+2)(x + y + z) = 3$ donne $0 = 3$.

Erreur fréquente : diviser par $m - 1$ ou par $m + 2$ sans avoir écarté les cas où ces nombres sont nuls.

Barème : a) 2 points (1 point par étape d'élimination correctement justifiée) ; b) 1,5 point (0,5 pour le caractère de Cramer, 1 pour la solution) ; c) 1,5 point (0,75 par cas).

Exercice 3 : Puissances d'une matrice par la formule du binôme (4 points)

a. $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = N^2 N = 0$.

N est nilpotente d'indice 3, et donc $N^k = 0$ pour tout $k \geq 3$.

b. Les matrices $2I_3$ et N commutent, car $2I_3$ commute avec toute matrice. La formule du

binôme s'applique donc. Pour $n \geq 2$, seuls les termes $k = 0, 1, 2$ sont non nuls :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k = 2^n I_3 + n 2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2.$$

Comme $\frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} = n(n-1) 2^{n-3}$, on obtient :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n 2^{n-1} & n(n-1) 2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

C'est l'expression de A^n pour tout $n \geq 2$ (elle reste d'ailleurs vraie pour $n = 0$ et $n = 1$).

c. Directement :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

La formule donne $2^2 = 4$, $2 \times 2^1 = 4$ et $2 \times 1 \times 2^{-1} = 1$. **Les deux calculs concordent.**

Erreur fréquente : appliquer le binôme sans vérifier la commutation, ou écrire $N^2 = 0$.

Barème : a) 1 point ; b) 2,5 points (0,5 pour la commutation, 1 pour le développement tronqué, 1 pour la matrice explicite) ; c) 0,5 point.

Exercice 4 : Inverse d'une matrice par la méthode de Gauss-Jordan (3,5 points)

a. On part de la matrice augmentée et on effectue les opérations indiquées :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

Les trois pivots valent 1 : la matrice est de rang 3, donc **M est inversible**. On remonte :

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3, L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification de $MM^{-1} = I_3$: la première ligne de M donne $-24 + 40 - 15 = 1$, $18 - 30 + 12 = 0$, $5 - 8 + 3 = 0$; la deuxième $20 - 20 = 0$, $-15 + 16 = 1$, $-4 + 4 = 0$; la troisième $-120 + 120 = 0$, $90 - 90 = 0$, $25 - 24 = 1$.

L'inverse est correct.

b. Le système s'écrit $MX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc $X = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$x = -24 + 36 + 15 = 27, \quad y = 20 - 30 - 12 = -22, \quad z = -5 + 8 + 3 = 6.$$

Contrôle : $27 - 44 + 18 = 1$, $-22 + 24 = 2$, $135 - 132 = 3$. **L'unique solution est $(27, -22, 6)$.**

Barème : a) 2,5 points (1,5 pour les opérations, 0,5 pour la justification de l'inversibilité, 0,5 pour l'inverse vérifié) ; b) 1 point.

Exercice 5 : Problème : matrices triangulaires supérieures (4,5 points)

- a. Soient $i > j$. Par définition du produit, $(ST)_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ik} t_{kj}$. Pour chaque k : si $k < i$, alors $s_{ik} = 0$; sinon $k \geq i > j$, donc $t_{kj} = 0$. Tous les termes sont nuls et $(ST)_{ij} = 0$: $ST \in \mathcal{T}_n$.

Pour $i = j$, le même argument annule tous les termes sauf celui où $k = i$:
 $(ST)_{ii} = s_{ii} t_{ii}$.

- b. Le système $TX = Y$ s'écrit, ligne i : $t_{ii} x_i + \sum_{k>i} t_{ik} x_k = y_i$. La dernière ligne donne $x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}$, défini de façon unique car $t_{nn} \neq 0$. Si $x_{i+1}, \dots, x_n$ sont déterminés de façon unique, la ligne i donne de façon unique

$$x_i = \frac{1}{t_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^n t_{ik} x_k \right).$$

Par récurrence descendante, **le système admet une unique solution**. Notons C_j la solution de $TX = E_j$, où E_j est la j -ième colonne de I_n , et B la matrice de colonnes $C_1, \dots, C_n$. Alors $TB = I_n$. Pour une matrice carrée, l'existence d'un inverse à droite suffit (théorème du cours, conséquence de la méthode du pivot). **Donc T est inversible et $T^{-1} = B$.**

- c. La j -ième colonne de T^{-1} est la solution X de $TX = E_j$. Pour $i > j$, la i -ième coordonnée de E_j est nulle. En reprenant la remontée de b) : $x_n = 0$ si $n > j$, puis, de proche en proche, $x_i = \frac{1}{t_{ii}} \left(0 - \sum_{k>i} t_{ik} \times 0 \right) = 0$ pour tout $i > j$. **Les coefficients de T^{-1} situés sous la diagonale sont nuls : $T^{-1} \in \mathcal{T}_n$.**

d. Pour tout j , le coefficient diagonal $(A^T A)_{jj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2$ est nul. Une somme de carrés de réels est nulle si et seulement si chaque carré l'est, donc $a_{ij} = 0$ pour tout i . Ainsi $A = 0$.

Barème : a) 1,5 point (1 pour la nullité sous la diagonale, 0,5 pour la diagonale) ; b) 1,5 point (1 pour l'existence et l'unicité par remontée, 0,5 pour l'inversibilité) ; c) 1 point ; d) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : systèmes linéaires, pivot de Gauss et inverse

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Systèmes linéaires et matrices](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [systèmes linéaires et matrices](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).