# Corrigé du contrôle de maths L1 : suites, convergence et suites adjacentes

**Barème du contrôle**

| Exercice | Points |
|---|---|
| Exercice 1 : Théorème de Bolzano-Weierstrass | 4 points |
| Exercice 2 : Convergence et divergence par la définition | 4 points |
| Exercice 3 : Suites adjacentes et irrationalité de e | 5 points |
| Exercice 4 : Suite récurrente et intervalle stable | 7 points |
| **Total** | **20 points** |

## Exercice 1 : Théorème de Bolzano-Weierstrass (4 points)

a. **Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.** Autrement dit, si $(u_n)$ est bornée, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(k)})$ converge.

b. Soit $(u_n)$ une suite bornée : il existe $m \leq M$ tels que $m \leq u_n \leq M$ pour tout $n$.

*Construction des intervalles.* On pose $a_0 = m$ et $b_0 = M$. L'intervalle $[a_0, b_0]$ contient tous les termes, donc une infinité de termes (au sens : l'ensemble des indices $n$ tels que $u_n \in [a_0, b_0]$ est infini). Supposons construits $a_k \leq b_k$ tels que l'ensemble $I_k = \left\{ n \in N : u_n \in \nu \, [a_k, b_k] \right\}$ soit infini. On pose $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$. Comme $I_k$ est la réunion des ensembles d'indices associés à $[a_k, c_k]$ et à $[c_k, b_k]$, l'un des deux est infini. Si celui de $[a_k, c_k]$ est infini, on pose $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$ ; sinon, $a_{k+1} = c_k$ et

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$b_{k+1} = b_k$.

*Les suites sont adjacentes.* Par construction, $a_k \leq a_{k+1}$, $b_{k+1} \leq b_k$ et $b_k - a_k = \frac{M-m}{2^k}$, qui tend vers $0$. Donc $(a_k)$ et $(b_k)$ sont adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers une même limite $\ell$.

*Construction de l'extractrice.* On pose $\varphi(0) = 0$. Si $\varphi(k)$ est construit, l'ensemble $I_{k+1}$ est infini, donc il contient un entier strictement supérieur à $\varphi(k)$ : on note $\varphi(k+1)$ le plus petit (il existe car toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément). Ainsi $\varphi$ est strictement croissante et $a_k \leq u_{\varphi(k)} \leq b_k$ pour tout $k \geq 1$.

*Conclusion.* Par le théorème des gendarmes, $u_{\varphi(k)}$ tend vers $\ell$. **La suite extraite $(u_{\varphi(k)})$ converge : le théorème est démontré.**

*Barème : a) 1 point (0,5 si « bornée » ou « extraite » manque) ; b) 3 points : 1 point pour la dichotomie et le choix d'une moitié contenant une infinité de termes, 0,5 point pour les suites adjacentes, 1 point pour la construction de $\varphi$ strictement croissante, 0,5 point pour la conclusion par les gendarmes.*

## Exercice 2 : Convergence et divergence par la définition (4 points)

a. Pour tout $n \geq 0$ :

$$u_n - 2 = \frac{2n+1-2(n+3)}{n+3} = \frac{-5}{n+3}, \text{ donc } |u_n - 2| = \frac{5}{n+3}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $N = \left\lfloor \frac{5}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, qui vérifie $N > \frac{5}{\varepsilon}$ et $N \geq 1$ (propriété d'Archimède). Pour tout $n \geq N$ :

$$|u_n - 2| = \frac{5}{n+3} < \frac{5}{n} \leq \frac{5}{N} < \varepsilon.$$

**Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N$ tel que $n \geq N$ entraîne $|u_n - 2| < \varepsilon$ : la suite $(u_n)$ converge vers $2$.**

b. Pour tout $n$, $v_{2n} = \frac{2n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1}$, qui tend vers $1$, et $v_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+2} = -1 + \frac{1}{2n+2}$, qui tend vers $-1$.

Si $(v_n)$ convergeait vers un réel $L$, toute suite extraite de $(v_n)$ convergerait aussi vers $L$. On aurait alors $L = 1$ et $L = -1$ par unicité de la limite, ce qui est absurde. **Deux suites extraites ont des limites différentes : la suite $(v_n)$ diverge.**

**Erreur fréquente :** choisir $N$ dépendant de $n$. Le rang $N$ ne doit dépendre que de $\varepsilon$.

*Barème : a) 2 points : 0,5 point pour le calcul de $|u_n - 2|$, 1 point pour un rang $N$ explicite et justifié, 0,5 point pour la rédaction avec les quantificateurs ; b) 2 points : 1 point pour les deux limites extraites, 1 point pour l'argument d'unicité de la limite.*

## Exercice 3 : Suites adjacentes et irrationalité de e (5 points)

a. Pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ : $(u_n)$ **est strictement croissante**.

Ensuite, en utilisant $(n+1)(n+1)! = (n+1)^2\, n!$, on réduit au dénominateur commun $n(n+1)(n+1)!$ :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}.$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Le numérateur vaut $n^2+2n-n^2-2n-1=-1$. Donc $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}<0$ : $(v_n)$ **est strictement décroissante**.

b. On a $v_n-u_n=\frac{1}{n\cdot n!}$, qui tend vers $0$. Avec la question a), **les suites** $(u_n)$ **et** $(v_n)$ **sont adjacentes**. D'après le théorème des suites adjacentes, **elles convergent vers une même limite** $\ell$.

c. Soit $n\geq 1$. La suite $(u_k)$ est strictement croissante et tend vers $\ell$, donc $u_n<u_{n+1}\leq \ell$. De même, $(v_k)$ est strictement décroissante, donc $\ell\leq v_{n+1}<v_n$. Ainsi $u_n<\ell<v_n$.

Pour $n=3$ : $u_3=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{8}{3}$ et $v_3=\frac{8}{3}+\frac{1}{3\times 6}=\frac{48}{18}+\frac{1}{18}=\frac{49}{18}$.

**Donc** $\frac{8}{3}<\mathrm{e}<\frac{49}{18}$, soit environ $2{,}667<\mathrm{e}<2{,}723$.

d. Supposons $\ell=\frac{p}{q}$ avec $p,q\in\mathbb{N}^*$. La question c) pour $n=q$ donne $u_q<\frac{p}{q}<u_q+\frac{1}{q\cdot q!}$. On multiplie par $q\cdot q!>0$ :

$$q\cdot q!\ u_q<p\cdot q!<q\cdot q!\ u_q+1.$$

Or $q!\ u_q=\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}$ est un entier, car $k!$ divise $q!$ pour $k\leq q$. Donc $A=q\cdot q!\ u_q$ est un entier et l'entier $p\cdot q!$ vérifie $A<p\cdot q!<A+1$. Aucun entier n'est strictement compris entre deux entiers consécutifs : c'est absurde. **Le nombre e est irrationnel.**

*Barème : a) 2 points : 0,5 point pour $(u_n)$, 1 point pour le calcul de $v_{n+1}-v_n$, 0,5 point pour la conclusion ; b) 1 point : 0,5 point pour la limite de $v_n-u_n$, 0,5 point pour le théorème cité ; c) 1 point : 0,5 point pour les inégalités strictes justifiées, 0,5 point pour l'encadrement $\frac{8}{3}<\mathrm{e}<\frac{49}{18}$ ; d) 1 point : 0,5 point pour l'entier $A$, 0,5 point pour la contradiction.*

## Exercice 4 : Suite récurrente et intervalle stable (7 points)

a. La fonction $x \to 6 + x$ est croissante et positive sur $[0,3]$, et la racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$. Par composition, $f$ **est croissante sur** $[0, 3]$. Pour $x \in [0,3]$, on a donc $f(0) \leq f(x) \leq f(3)$, avec $f(0) = \sqrt{6} \geq 0$ et $f(3) = \sqrt{9} = 3$. **Ainsi** $f([0,3]) \subset [\sqrt{6}, 3] \subset [0,3]$**.**

b. Soit $P(n)$ : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ ».

*Initialisation.* $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{6}$, donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$ car $\sqrt{6} \leq \sqrt{9}$.

*Hérédité.* Supposons $P(n)$ vrai. Les réels $u_n$ et $u_{n+1}$ sont dans $[0,3]$, où $f$ est croissante, donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Par stabilité, $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \in [0,3]$. Donc $P(n+1)$ est vrai.

**Par récurrence, pour tout** $n$**,** $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$**.**

c. La suite $(u_n)$ est croissante et majorée par $3$. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\ell$, avec $0 \leq \ell \leq 3$ par passage à la limite dans les inégalités larges.

Pour tout $n$, $u_{n+1}^2 = 6 + u_n$. La suite $(u_{n+1})$ converge aussi vers $\ell$. Par opérations sur les limites, $\ell^2 = 6 + \ell$, donc $\ell^2 - \ell - 6 = (\ell - 3)(\ell + 2) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, on obtient $\ell = 3$ **: la suite** $(u_n)$ **converge vers** $3$.

d. Pour tout $n$, en multipliant par la quantité conjuguée :

$$|u_{n+1} - 3| = \left|\sqrt{6 + u_n} - 3\right| = \frac{|6 + u_n - 9|}{\sqrt{6 + u_n} + 3} = \frac{|u_n - 3|}{\sqrt{6 + u_n} + 3}.$$

Comme $u_n \geq 0$, $\sqrt{6 + u_n} \geq \sqrt{6} \geq 2$, donc le dénominateur est supérieur ou égal à $5$. D'où $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{5}|u_n - 3|$.

Par une récurrence immédiate, $|u_n - 3| \leq \frac{1}{5^n}|u_0 - 3| = \frac{3}{5^n}$. Comme $u_n \leq 3$, on obtient

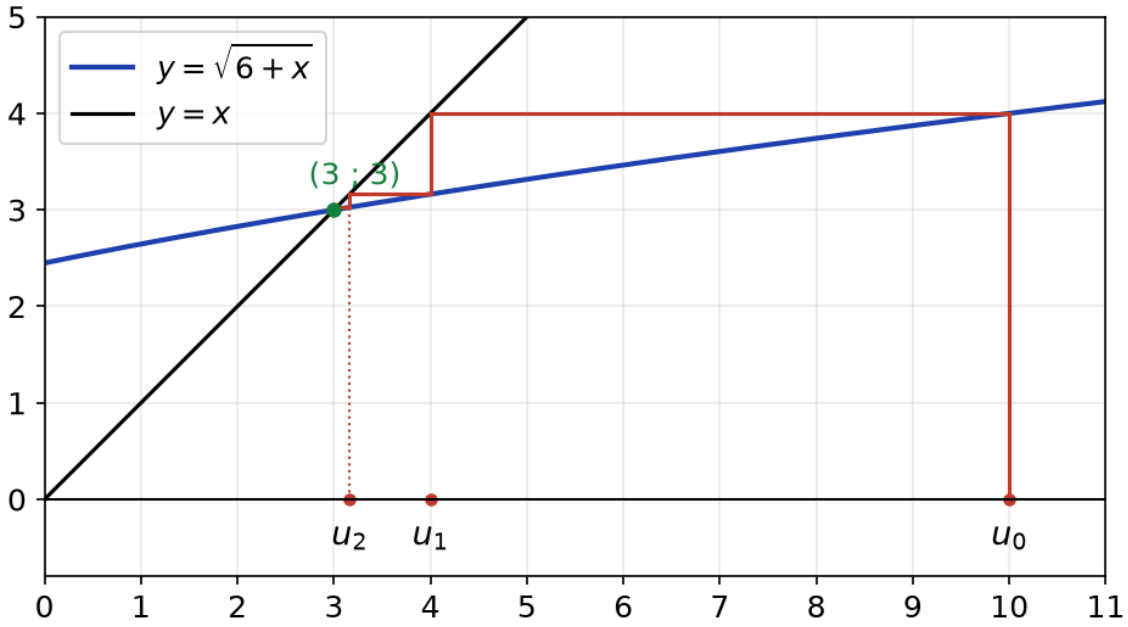
Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$0 \leq 3 - u_n \leq \frac{3}{5^n}$.

Il suffit que $\frac{3}{5^n} \leq 10^{-6}$, soit $5^n \geq 3\,000\,000$. Or $5^9 = 1\,953\,125$ et $5^{10} = 9\,765\,625$. **Pour tout $n \geq 10$, $u_n$ est une valeur approchée de $3$ à $10^{-6}$ près.**

e. Sur $[3, +\infty[$, $f$ est croissante et $f(x) \geq f(3) = 3$ : l'intervalle $[3, +\infty[$ est stable par $f$. On a $u_0 = 10$ et $u_1 = \sqrt{16} = 4$, donc $3 \leq u_1 \leq u_0$. Si $3 \leq u_{n+1} \leq u_n$, la croissance de $f$ et la stabilité donnent $3 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Par récurrence, **la suite est décroissante et minorée par** $3$.

Par le théorème de la limite monotone, elle converge vers $\ell \geq 3$, et le même passage à la limite donne $\ell^2 = 6 + \ell$. **Donc $\ell = 3$ : la suite converge encore vers** $3$, cette fois en décroissant, comme le montre l'escalier ci-dessous.




**Erreur fréquente :** écrire $\ell = f(\ell)$ sans justifier le passage à la limite. Ici, on l'obtient sans continuité, en passant à la limite dans $u_{n+1}^2 = 6 + u_n$.

*Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la croissance, 0,5 point pour la stabilité ; b) 1,5 point : 0,5 point pour l'initialisation, 1 point pour l'hérédité ; c) 1,5 point : 0,5 point pour la limite monotone, 1 point pour*

*$\ell = 3$ avec l'élimination de $-2$ ; d) 1,5 point : 0,5 point pour la quantité conjuguée, 0,5 point pour la majoration par $\frac{3}{5^n}$, 0,5 point pour $n = 10$ ; e) 1,5 point : 0,5 point pour la stabilité de $[3, +\infty[$, 0,5 point pour la monotonie, 0,5 point pour la limite.*

**Revenir à l'énoncé du contrôle**

## Après le corrigé du contrôle : suites, convergence et suites adjacentes

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Suites numériques » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** suites numériques.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L1** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

## Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- Contrôle de maths L1 : suites, continuité et dérivation

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.