

Corrigé du contrôle de maths L1 : suites, convergence et suites adjacentes

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Théorème de Bolzano-Weierstrass	4 points
Exercice 2 : Convergence et divergence par la définition	4 points
Exercice 3 : Suites adjacentes et irrationalité de e	5 points
Exercice 4 : Suite récurrente et intervalle stable	7 points
Total	20 points

Exercice 1 : Théorème de Bolzano-Weierstrass (4 points)

a. **Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.** Autrement dit, si (u_n) est bornée, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(k)})$ converge.

b. Soit (u_n) une suite bornée : il existe $m \leq M$ tels que $m \leq u_n \leq M$ pour tout n .

Construction des intervalles. On pose $a_0 = m$ et $b_0 = M$. L'intervalle $[a_0, b_0]$ contient tous les termes, donc une infinité de termes (au sens : l'ensemble des indices n tels que $u_n \in [a_0, b_0]$ est infini). Supposons construits $a_k \leq b_k$ tels que l'ensemble

$I_k = \{n \in \mathbb{N} : u_n \in]a_k, b_k]\}$ soit infini. On pose $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$. Comme I_k est la réunion des ensembles d'indices associés à $[a_k, c_k]$ et à $[c_k, b_k]$, l'un des deux est infini. Si celui de $[a_k, c_k]$ est infini, on pose $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$; sinon, $a_{k+1} = c_k$ et

$$b_{k+1} = b_k.$$

Les suites sont adjacentes. Par construction, $a_k \leq a_{k+1}$, $b_{k+1} \leq b_k$ et $b_k - a_k = \frac{M-m}{2^k}$, qui tend vers 0. Donc (a_k) et (b_k) sont adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ .

Construction de l'extractrice. On pose $\varphi(0) = 0$. Si $\varphi(k)$ est construit, l'ensemble I_{k+1} est infini, donc il contient un entier strictement supérieur à $\varphi(k)$: on note $\varphi(k+1)$ le plus petit (il existe car toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément). Ainsi φ est strictement croissante et $a_k \leq u_{\varphi(k)} \leq b_k$ pour tout $k \geq 1$.

Conclusion. Par le théorème des gendarmes, $u_{\varphi(k)}$ tend vers ℓ . **La suite extraite $(u_{\varphi(k)})$ converge : le théorème est démontré.**

Barème : a) 1 point (0,5 si « bornée » ou « extraite » manque) ; b) 3 points : 1 point pour la dichotomie et le choix d'une moitié contenant une infinité de termes, 0,5 point pour les suites adjacentes, 1 point pour la construction de φ strictement croissante, 0,5 point pour la conclusion par les gendarmes.

Exercice 2 : Convergence et divergence par la définition (4 points)

a. Pour tout $n \geq 0$:

$$u_n - 2 = \frac{2n + 1 - 2(n+3)}{n+3} = \frac{-5}{n+3}, \text{ donc } |u_n - 2| = \frac{5}{n+3}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $N = \left\lfloor \frac{5}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, qui vérifie $N > \frac{5}{\varepsilon}$ et $N \geq 1$ (propriété d'Archimède). Pour tout $n \geq N$:

$$|u_n - 2| = \frac{5}{n+3} < \frac{5}{n} \leq \frac{5}{N} < \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $n \geq N$ entraîne $|u_n - 2| < \varepsilon$: la suite (u_n) converge vers 2.

b. Pour tout n , $v_{2n} = \frac{2n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1}$, qui tend vers 1, et
 $v_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+2} = -1 + \frac{1}{2n+2}$, qui tend vers -1.

Si (v_n) convergerait vers un réel L , toute suite extraite de (v_n) convergerait aussi vers L . On aurait alors $L = 1$ et $L = -1$ par unicité de la limite, ce qui est absurde. **Deux suites extraites ont des limites différentes : la suite (v_n) diverge.**

Erreur fréquente : choisir N dépendant de n . Le rang N ne doit dépendre que de ε .

Barème : a) 2 points : 0,5 point pour le calcul de $|u_n - 2|$, 1 point pour un rang N explicite et justifié, 0,5 point pour la rédaction avec les quantificateurs ; b) 2 points : 1 point pour les deux limites extraites, 1 point pour l'argument d'unicité de la limite.

Exercice 3 : Suites adjacentes et irrationalité de e (5 points)

a. Pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$: (u_n) **est strictement croissante**.

Ensuite, en utilisant $(n+1)(n+1)! = (n+1)^2 n!$, on réduit au dénominateur commun $n(n+1)(n+1)!$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}.$$

Le numérateur vaut $n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1 = -1$. Donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 : (v_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

b. On a $v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!}$, qui tend vers 0. Avec la question a), **les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes**. D'après le théorème des suites adjacentes, **elles convergent vers une même limite ℓ** .

c. Soit $n \geq 1$. La suite (u_k) est strictement croissante et tend vers ℓ , donc $u_n < u_{n+1} \leq \ell$. De même, (v_k) est strictement décroissante, donc $\ell \leq v_{n+1} < v_n$. Ainsi $u_n < \ell < v_n$.

Pour $n = 3$: $u_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}$ et $v_3 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3 \times 6} = \frac{48}{18} + \frac{1}{18} = \frac{49}{18}$.

Donc $\frac{8}{3} < e < \frac{49}{18}$, soit environ $2,667 < e < 2,723$.

d. Supposons $\ell = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. La question c) pour $n = q$ donne $u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q \cdot q!}$. On multiplie par $q \cdot q! > 0$:

$$q \cdot q! u_q < p \cdot q! < q \cdot q! u_q + 1.$$

Or $q! u_q = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}$ est un entier, car $k!$ divise $q!$ pour $k \leq q$. Donc $A = q \cdot q! u_q$ est un entier et l'entier $p \cdot q!$ vérifie $A < p \cdot q! < A + 1$. Aucun entier n'est strictement compris entre deux entiers consécutifs : c'est absurde. **Le nombre e est irrationnel.**

Barème : a) 2 points : 0,5 point pour (u_n) , 1 point pour le calcul de $v_{n+1} - v_n$, 0,5 point pour la conclusion ; b) 1 point : 0,5 point pour la limite de $v_n - u_n$, 0,5 point pour le théorème cité ; c) 1 point : 0,5 point pour les inégalités strictes justifiées, 0,5 point pour l'encadrement $\frac{8}{3} < e < \frac{49}{18}$; d) 1 point : 0,5 point pour l'entier A , 0,5 point pour la contradiction.

Exercice 4 : Suite récurrente et intervalle stable (7 points)

- a. La fonction $x \rightarrow 6 + x$ est croissante et positive sur $[0, 3]$, et la racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$. Par composition, f **est croissante sur** $[0, 3]$. Pour $x \in [0, 3]$, on a donc $f(0) \leq f(x) \leq f(3)$, avec $f(0) = \sqrt{6} \geq 0$ et $f(3) = \sqrt{9} = 3$. **Ainsi** $f([0, 3]) \subset [\sqrt{6}, 3] \subset [0, 3]$.

- b. Soit $P(n) : \ll 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3 \gg$.

Initialisation. $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{6}$, donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$ car $\sqrt{6} \leq \sqrt{9}$.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vrai. Les réels u_n et u_{n+1} sont dans $[0, 3]$, où f est croissante, donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Par stabilité, $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \in [0, 3]$. Donc $P(n+1)$ est vrai.

Par récurrence, pour tout n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

- c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 3. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ , avec $0 \leq \ell \leq 3$ par passage à la limite dans les inégalités larges.

Pour tout n , $u_{n+1}^2 = 6 + u_n$. La suite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ . Par opérations sur les limites, $\ell^2 = 6 + \ell$, donc $\ell^2 - \ell - 6 = (\ell - 3)(\ell + 2) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, on obtient $\ell = 3$: **la suite (u_n) converge vers 3**.

- d. Pour tout n , en multipliant par la quantité conjuguée :

$$|u_{n+1} - 3| = |\sqrt{6 + u_n} - 3| = \frac{|6 + u_n - 9|}{\sqrt{6 + u_n} + 3} = \frac{|u_n - 3|}{\sqrt{6 + u_n} + 3}.$$

Comme $u_n \geq 0$, $\sqrt{6 + u_n} \geq \sqrt{6} \geq 2$, donc le dénominateur est supérieur ou égal à 5. D'où $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{5}|u_n - 3|$.

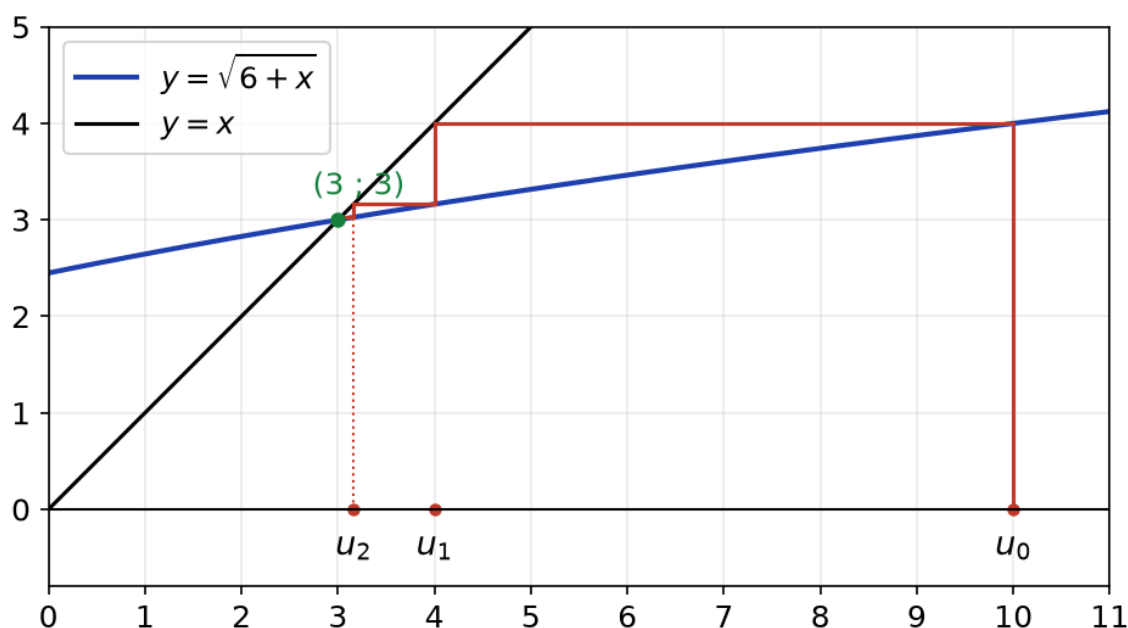
Par une récurrence immédiate, $|u_n - 3| \leq \frac{1}{5^n}|u_0 - 3| = \frac{3}{5^n}$. Comme $u_n \leq 3$, on obtient

$$0 \leq 3 - u_n \leq \frac{3}{5^n}.$$

Il suffit que $\frac{3}{5^n} \leq 10^{-6}$, soit $5^n \geq 3\,000\,000$. Or $5^9 = 1\,953\,125$ et $5^{10} = 9\,765\,625$.
Pour tout $n \geq 10$, u_n est une valeur approchée de 3 à 10^{-6} près.

- e. Sur $[3, +\infty[$, f est croissante et $f(x) \geq f(3) = 3$: l'intervalle $[3, +\infty[$ est stable par f . On a $u_0 = 10$ et $u_1 = \sqrt{16} = 4$, donc $3 \leq u_1 \leq u_0$. Si $3 \leq u_{n+1} \leq u_n$, la croissance de f et la stabilité donnent $3 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Par récurrence, **la suite est décroissante et minorée par 3**.

Par le théorème de la limite monotone, elle converge vers $\ell \geq 3$, et le même passage à la limite donne $\ell^2 = 6 + \ell$. **Donc $\ell = 3$: la suite converge encore vers 3**, cette fois en décroissant, comme le montre l'escalier ci-dessous.



Erreur fréquente : écrire $\ell = f(\ell)$ sans justifier le passage à la limite. Ici, on l'obtient sans continuité, en passant à la limite dans $u_{n+1}^2 = 6 + u_n$.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la croissance, 0,5 point pour la stabilité ; b) 1,5 point : 0,5 point pour l'initialisation, 1 point pour l'hérédité ; c) 1,5 point : 0,5 point pour la limite monotone, 1 point pour

$\ell = 3$ avec l'élimination de -2 ; d) 1,5 point : 0,5 point pour la quantité conjuguée, 0,5 point pour la majoration par $\frac{3}{5^n}$, 0,5 point pour $n = 10$; e) 1,5 point : 0,5 point pour la stabilité de $[3, +\infty[$, 0,5 point pour la monotonie, 0,5 point pour la limite.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : suites, convergence et suites adjacentes

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Suites numériques » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [suites numériques](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : suites, continuité et dérivation](#)