Corrigé du contrôle de maths L1 : suites, continuité et dérivation

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Somme alternée et suites extraites	5 points
Exercice 2 : Accroissements finis et valeurs intermédiaires	6 points
Exercice 3 : Itérations du cosinus et point fixe	9 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Somme alternée et suites extraites (5 points)

a. Pour tout $n \geq 1$:

$$u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0,$$

donc (u_{2n}) est croissante. Pour tout $n \geq 0$:

$$u_{2n+3} - u_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 0,$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

donc (u_{2n+1}) est décroissante. Enfin $u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ tend vers 0. **Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.**

b. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_1 tel que $n \geq N_1$ entraîne $|v_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$, et N_2 tel que $n \geq N_2$ entraîne $|v_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$. On pose $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Soit $p \geq N$. Si $p = 2n$ est pair, alors $n \geq N_1$; si $p = 2n+1$ est impair, alors $n \geq N_2$. Dans les deux cas, $|v_p - \ell| \leq \varepsilon$. **Donc (v_n) converge vers ℓ.**

Par le théorème des suites adjacentes, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite. **D'après ce qui précède, (u_n) converge.**

c. La suite (u_{2n}) est croissante de limite ℓ, donc $u_{2n} \leq \ell$; la suite (u_{2n+1}) est décroissante de limite ℓ, donc $\ell \leq u_{2n+1}$.

Pour $n = 2$: $u_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12 - 6 + 4 - 3}{12} = \frac{7}{12}$ et $u_5 = \frac{7}{12} + \frac{1}{5} = \frac{35 + 12}{60} = \frac{47}{60}$.

Donc $\frac{7}{12} \leq \ell \leq \frac{47}{60}$.

d. Si $n = 2m$ est pair, $u_{2m} \leq \ell \leq u_{2m+1}$, donc $|u_n - \ell| \leq u_{2m+1} - u_{2m} = \frac{1}{2m+1} = \frac{1}{n+1}$. Si $n = 2m+1$ est impair, $u_{2m+2} \leq \ell \leq u_{2m+1}$, donc $|u_n - \ell| \leq u_{2m+1} - u_{2m+2} = \frac{1}{2m+2} = \frac{1}{n+1}$.
Dans tous les cas, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{n+1}$.

Barème : a) 2 points : 0,5 point par monotonie, 0,5 point pour la différence qui tend vers 0, 0,5 point pour la conclusion ; b) 1,5 point : 1 point pour le choix de N et la disjonction pair/impair, 0,5 point pour la conclusion sur (u_n) ; c) 1 point : 0,5 point pour les inégalités, 0,5 point pour $\frac{7}{12}$ et $\frac{47}{60}$; d) 0,5 point.

Exercice 2 : Accroissements finis et valeurs intermédiaires (6

points)

a. On pose $k(x) = f(x) + x - 1$, continue sur $[0,1]$. On a $k(0) = -1 < 0$ et $k(1) = 1 > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, k s'annule en un point $c \in [0,1]$, qui n'est ni 0 ni 1 puisque $k(0) \neq 0$ et $k(1) \neq 0$. **Il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = 1 - c$.**

b. La fonction f est continue sur $[0, c]$ et dérivable sur $]0, c[$. Par l'égalité des accroissements finis, il existe $a \in]0, c[$ tel que

$$f'(a) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{1 - c}{c}.$$

De même, sur $[c, 1]$, il existe $b \in]c, 1[$ tel que

$$f'(b) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = \frac{1 - (1 - c)}{1 - c} = \frac{c}{1 - c}.$$

Les réels $a < c < b$ sont distincts et $f'(a)\ f'(b) = \frac{1-c}{c} \times \frac{c}{1-c} = 1$.

c. Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ comme dans l'indication. Pour $x > A$, la fonction g est continue sur $[A, x]$ et dérivable sur $]A, x[$: l'égalité des accroissements finis donne $c_x \in]A, x[$ tel que $g(x) - g(A) = g'(c_x)(x - A)$. On en déduit

$$\frac{g(x)}{x} - L = \frac{g(A) - LA}{x} + \left(g'(c_x) - L\right)\frac{x - A}{x}.$$

Comme $c_x \geq A$, on a $|g'(c_x) - L| \leq \varepsilon$, et $0 < \frac{x-A}{x} < 1$, donc le second terme est majoré en valeur absolue par ε. Le premier terme tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (A est fixé) : il existe $B \geq A$ tel que $\frac{|g(A) - LA|}{x} \leq \varepsilon$ pour $x \geq B$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Ainsi, pour tout $x \geq B$, $\left|\frac{g(x)}{x} - L\right| \leq 2\varepsilon$. Comme ε est arbitraire, $\frac{g(x)}{x}$ **tend vers** L **quand** x **tend vers** $+\infty$.

Erreur fréquente : appliquer les accroissements finis sur $[0, x]$. Le point c_x obtenu peut alors rester proche de 0, où l'on ne contrôle pas g' ; c'est pour cela qu'on part de A.

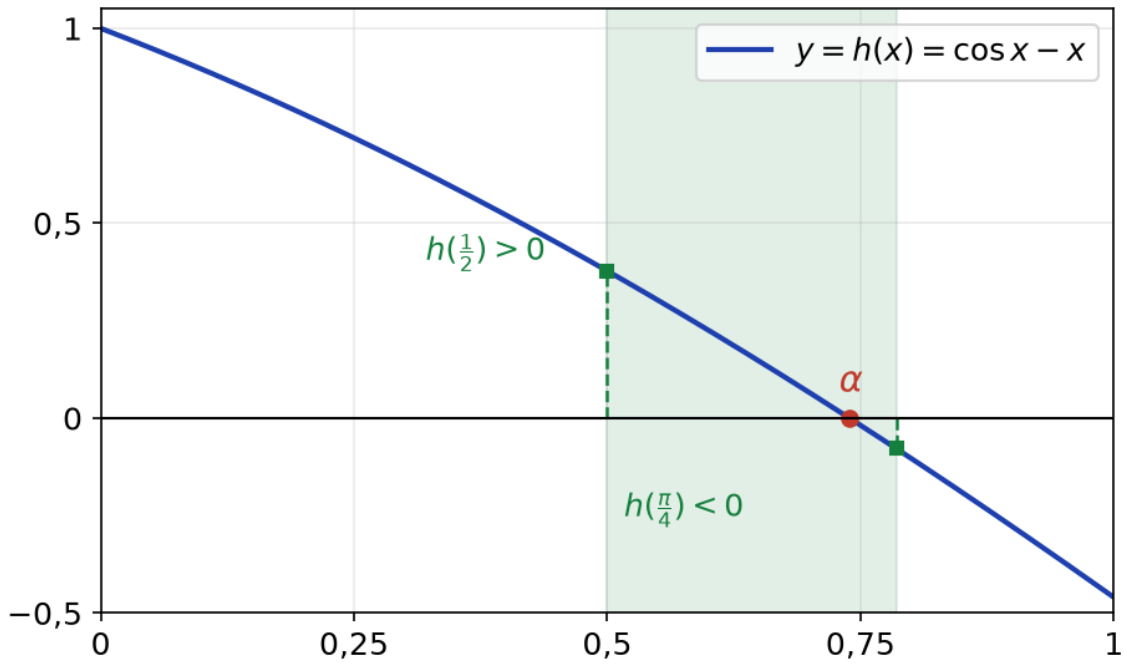
Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la fonction auxiliaire, 0,5 point pour le théorème et $c \neq 0, 1$; b) 2 points : 0,5 point par application des accroissements finis avec hypothèses, 0,5 point pour $a \neq b$, 0,5 point pour le produit ; c) 3 points : 1 point pour l'égalité des accroissements finis sur $[A, x]$, 1 point pour la décomposition et la majoration par ε, 1 point pour le traitement du terme $\frac{g(A) - LA}{x}$ et la conclusion.

Exercice 3 : Itérations du cosinus et point fixe (9 points)

a. La fonction h est dérivable sur $[0,1]$ et $h'(x) = -\sin x - 1$. Sur $[0,1] \subset [0, \pi]$, $\sin x \geq 0$, donc $h'(x) \leq -1 < 0$: h est strictement décroissante et continue. De plus $h(0) = 1 > 0$ et $h(1) = \cos 1 - 1 < 0$, car $\cos 1 < 1$ (1 n'est pas un multiple de 2π). Par le théorème des valeurs intermédiaires, h s'annule sur $[0,1]$, et la stricte monotonie donne l'unicité. **Il existe un unique** $\alpha \in [0, 1]$ **tel que** $\cos \alpha = \alpha$; de plus $\alpha \in]0, 1[$.

b. Comme $\pi > 3$, on a $\frac{1}{2} < 1 < \frac{\pi}{3}$. Le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$, donc $\cos \frac{1}{2} > \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, soit $h\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

Ensuite $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2} - \pi}{4}$. Or $(2\sqrt{2})^2 = 8 < 9 < \pi^2$, donc $2\sqrt{2} < \pi$ et $h\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$. Les réels $\frac{1}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$ sont dans $[0,1]$ et h est strictement décroissante : $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{\pi}{4}$.



c. Le cosinus est décroissant sur $[0,1] \subset [0,\pi]$, donc $\cos([0,1]) = [\cos 1, 1]$. Comme $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$, $\cos 1 > 0$. **Ainsi** $\cos([0,1]) \subset [0,1]$, et une récurrence immédiate à partir de $u_0 \in [0,1]$ donne $u_n \in [0,1]$ **pour tout** n.

d. Le cosinus est dérivable sur $[0,1]$ de dérivée $-\sin$. Pour $t \in [0,1]$, $0 \leq \sin t \leq \sin 1$, car le sinus est croissant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $|\cos'(t)| \leq \sin 1$ sur $[0,1]$, et l'inégalité des accroissements finis donne $|\cos x - \cos y| \leq \sin(1)\ |x - y|$ pour tous $x, y \in [0,1]$.

e. Pour tout n, u_n et α sont dans $[0,1]$ et $\cos \alpha = \alpha$, donc

$$|u_{n+1} - \alpha| = |\cos u_n - \cos \alpha| \leq \sin(1)\ |u_n - \alpha|.$$

Par récurrence, $|u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n\ |u_0 - \alpha| \leq (\sin 1)^n$, car $|u_0 - \alpha| \leq 1$. Comme $0 < \sin 1 < 1$, $(\sin 1)^n$ tend vers 0. **Par le théorème des gendarmes,** (u_n) **converge vers** α**.**

f. Le cosinus est strictement décroissant sur $[0,1]$. Supposons $u_n \neq \alpha$. Si $u_n > \alpha$, alors $u_{n+1} = \cos u_n < \cos \alpha = \alpha$; si $u_n < \alpha$, alors $u_{n+1} > \alpha$. Dans les deux cas, $u_{n+1} \neq \alpha$ et $u_{n+1} - \alpha$ **et** $u_n - \alpha$ **sont de signes contraires**. Comme $u_0 \neq \alpha$, une récurrence donne $u_n \neq \alpha$ **pour tout** n.

g. On pose $\tau(x) = \frac{\cos x - \cos \alpha}{x - \alpha}$ pour $x \neq \alpha$. Le cosinus est dérivable en α, donc $\tau(x)$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

tend vers $\cos'(\alpha) = -\sin\alpha$ quand x tend vers α. La suite (u_n) tend vers α sans jamais valoir α : par la caractérisation séquentielle de la limite, $\tau(u_n)$ tend vers $-\sin\alpha$. Or

$$\tau(u_n) = \frac{\cos u_n - \alpha}{u_n - \alpha} = \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}.$$

Donc $\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}$ **tend vers** $-\sin\alpha$**.**

h. D'après f), les termes passent alternativement de part et d'autre de α : l'escalier tourne autour du point $(\alpha\,;\alpha)$, d'où la **spirale**. D'après g), l'écart à α est multiplié à chaque étape par un nombre proche de $\sin\alpha$, avec $\sin\alpha < \sin\frac{\pi}{4} < 1$: la spirale se resserre à vitesse géométrique (convergence linéaire, de rapport environ $0{,}67$). Comme dans l'exercice 1, les termes de rang pair et ceux de rang impair restent chacun d'un même côté de la limite et l'encadrent.

Erreur fréquente : affirmer que (u_n) est monotone. Le cosinus étant décroissant sur $[0{,}1]$, la suite ne l'est pas : seules ses suites extraites de rangs pairs et impairs le sont.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la stricte monotonie, 0,5 point pour les signes, 0,5 point pour le théorème et l'unicité ; b) 1 point : 0,5 point par inégalité ; c) 1 point : 0,5 point pour $\cos 1 > 0$*, 0,5 point pour la stabilité et la récurrence ; d) 1 point ; e) 1 point : 0,5 point pour la récurrence, 0,5 point pour la limite ; f) 1,5 point : 1 point pour les signes contraires, 0,5 point pour* $u_n \neq \alpha$ *; g) 1,5 point : 0,5 point pour la fonction* τ*, 1 point pour la caractérisation séquentielle ; h) 0,5 point.*

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : suites, continuité et dérivation

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Suites numériques » en L1 et « Limites et continuité » en L1 et « Dérivation » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** suites numériques, limites et continuité, dérivation.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L1** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- Contrôle de maths L1 : suites, convergence et suites adjacentes
- Contrôle de maths L1 : limites de fonctions et continuité
- Contrôle de maths L1 : dérivation, Rolle et accroissements finis

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.