

Corrigé du contrôle de maths L1 : suites, continuité et dérivation

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Somme alternée et suites extraites	5 points
Exercice 2 : Accroissements finis et valeurs intermédiaires	6 points
Exercice 3 : Itérations du cosinus et point fixe	9 points
Total	20 points

Exercice 1 : Somme alternée et suites extraites (5 points)

a. Pour tout $n \geq 1$:

$$u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0,$$

donc (u_{2n}) est croissante. Pour tout $n \geq 0$:

$$u_{2n+3} - u_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 0,$$

donc (u_{2n+1}) est décroissante. Enfin $u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ tend vers 0. **Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.**

- b. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_1 tel que $n \geq N_1$ entraîne $|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$, et N_2 tel que $n \geq N_2$ entraîne $|u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$. On pose $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Soit $p \geq N$. Si $p = 2n$ est pair, alors $n \geq N_1$; si $p = 2n+1$ est impair, alors $n \geq N_2$. Dans les deux cas, $|u_p - \ell| \leq \varepsilon$. **Donc (u_n) converge vers ℓ .**

Par le théorème des suites adjacentes, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite.
D'après ce qui précède, (u_n) converge.

- c. La suite (u_{2n}) est croissante de limite ℓ , donc $u_{2n} \leq \ell$; la suite (u_{2n+1}) est décroissante de limite ℓ , donc $\ell \leq u_{2n+1}$.

$$\text{Pour } n = 2 : u_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12 - 6 + 4 - 3}{12} = \frac{7}{12} \text{ et } u_5 = \frac{7}{12} + \frac{1}{5} = \frac{35 + 12}{60} = \frac{47}{60}.$$

$$\text{Donc } \frac{7}{12} \leq \ell \leq \frac{47}{60}.$$

- d. Si $n = 2m$ est pair, $u_{2m} \leq \ell \leq u_{2m+1}$, donc $|u_n - \ell| \leq u_{2m+1} - u_{2m} = \frac{1}{2m+1} = \frac{1}{n+1}$. Si $n = 2m+1$ est impair, $u_{2m+2} \leq \ell \leq u_{2m+1}$, donc $|u_n - \ell| \leq u_{2m+1} - u_{2m+2} = \frac{1}{2m+2} = \frac{1}{n+1}$.
Dans tous les cas, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{n+1}$.

Barème : a) 2 points : 0,5 point par monotonie, 0,5 point pour la différence qui tend vers 0, 0,5 point pour la conclusion ; b) 1,5 point : 1 point pour le choix de N et la disjonction pair/impair, 0,5 point pour la conclusion sur (u_n) ; c) 1 point : 0,5 point pour les inégalités, 0,5 point pour $\frac{7}{12}$ et $\frac{47}{60}$; d) 0,5 point.

Exercice 2 : Accroissements finis et valeurs intermédiaires (6

points)

- a. On pose $k(x) = f(x) + x - 1$, continue sur $[0, 1]$. On a $k(0) = -1 < 0$ et $k(1) = 1 > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, k s'annule en un point $c \in [0, 1]$, qui n'est ni 0 ni 1 puisque $k(0) \neq 0$ et $k(1) \neq 0$. **Il existe** $c \in]0, 1[$ **tel que** $f(c) = 1 - c$.
- b. La fonction f est continue sur $[0, c]$ et dérivable sur $]0, c[$. Par l'égalité des accroissements finis, il existe $a \in]0, c[$ tel que

$$f'(a) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{1 - c}{c}.$$

De même, sur $[c, 1]$, il existe $b \in]c, 1[$ tel que

$$f'(b) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = \frac{1 - (1 - c)}{1 - c} = \frac{c}{1 - c}.$$

Les réels $a < c < b$ sont distincts et $f'(a) f'(b) = \frac{1-c}{c} \times \frac{c}{1-c} = 1$.

- c. Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ comme dans l'indication. Pour $x > A$, la fonction g est continue sur $[A, x]$ et dérivable sur $]A, x[$: l'égalité des accroissements finis donne $c_x \in]A, x[$ tel que $g(x) - g(A) = g'(c_x)(x - A)$. On en déduit

$$\frac{g(x)}{x} - L = \frac{g(A) - LA}{x} + (g'(c_x) - L) \frac{x - A}{x}.$$

Comme $c_x \geq A$, on a $|g'(c_x) - L| \leq \varepsilon$, et $0 < \frac{x - A}{x} < 1$, donc le second terme est majoré en valeur absolue par ε . Le premier terme tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (A est fixé) : il existe $B \geq A$ tel que $\frac{|g(A) - LA|}{x} \leq \varepsilon$ pour $x \geq B$.

Ainsi, pour tout $x \geq B$, $\left| \frac{g(x)}{x} - L \right| \leq 2\varepsilon$. Comme ε est arbitraire, $\frac{g(x)}{x}$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$.

Erreur fréquente : appliquer les accroissements finis sur $[0, x]$. Le point c_x obtenu peut alors rester proche de 0 , où l'on ne contrôle pas g' ; c'est pour cela qu'on part de A .

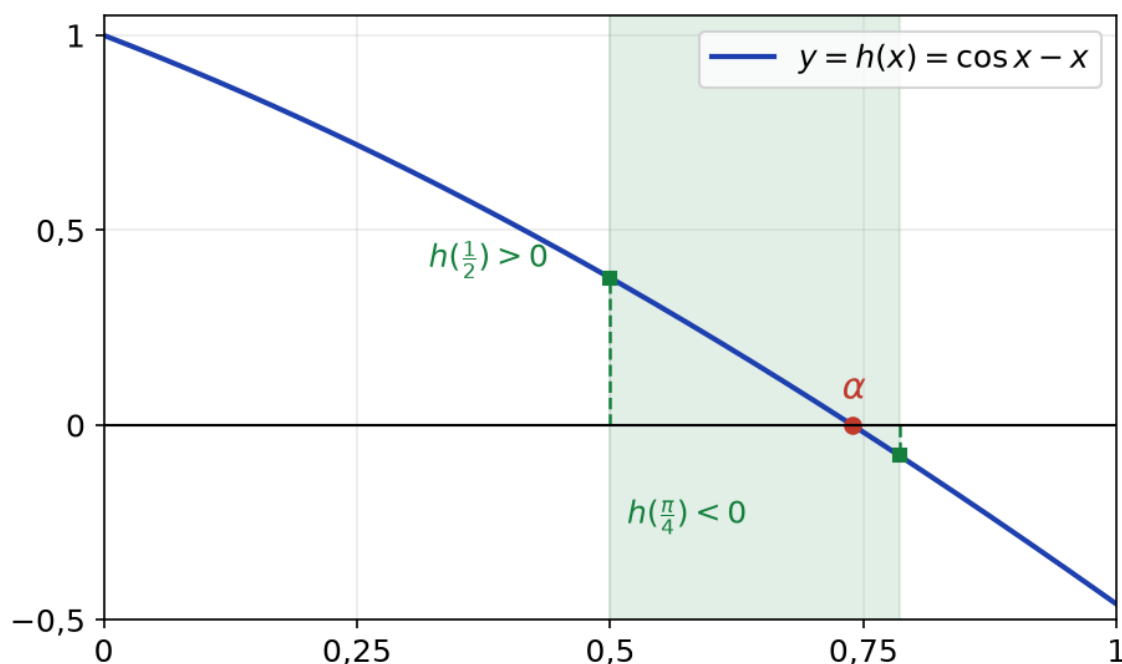
Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la fonction auxiliaire, 0,5 point pour le théorème et $c \neq 0, 1$; b) 2 points : 0,5 point par application des accroissements finis avec hypothèses, 0,5 point pour $a \neq b$, 0,5 point pour le produit ; c) 3 points : 1 point pour l'égalité des accroissements finis sur $[A, x]$, 1 point pour la décomposition et la majoration par ε , 1 point pour le traitement du terme $\frac{g(A) - LA}{x}$ et la conclusion.

Exercice 3 : Itérations du cosinus et point fixe (9 points)

a. La fonction h est dérivable sur $[0, 1]$ et $h'(x) = -\sin x - 1$. Sur $[0, 1] \subset [0, \pi]$, $\sin x \geq 0$, donc $h'(x) \leq -1 < 0$: h est strictement décroissante et continue. De plus $h(0) = 1 > 0$ et $h(1) = \cos 1 - 1 < 0$, car $\cos 1 < 1$ (1 n'est pas un multiple de 2π). Par le théorème des valeurs intermédiaires, h s'annule sur $[0, 1]$, et la stricte monotonie donne l'unicité. **Il existe un unique $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\cos \alpha = \alpha$** ; de plus $\alpha \in]0, 1[$.

b. Comme $\pi > 3$, on a $\frac{1}{2} < 1 < \frac{\pi}{3}$. Le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$, donc $\cos \frac{1}{2} > \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, soit $h\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

Ensuite $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2} - \pi}{4}$. Or $(2\sqrt{2})^2 = 8 < 9 < \pi^2$, donc $2\sqrt{2} < \pi$ et $h\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$. Les réels $\frac{1}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$ sont dans $[0, 1]$ et h est strictement décroissante : $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{\pi}{4}$.



- c. Le cosinus est décroissant sur $[0, 1] \subset [0, \pi]$, donc $\cos([0, 1]) = [\cos 1, 1]$. Comme $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$, $\cos 1 > 0$. **Ainsi** $\cos([0, 1]) \subset [0, 1]$, et une récurrence immédiate à partir de $u_0 \in [0, 1]$ donne $u_n \in [0, 1]$ **pour tout** n .
- d. Le cosinus est dérivable sur $[0, 1]$ de dérivée $-\sin$. Pour $t \in [0, 1]$, $0 \leq \sin t \leq \sin 1$, car le sinus est croissant sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Donc $|\cos'(t)| \leq \sin 1$ sur $[0, 1]$, et l'inégalité des accroissements finis donne $|\cos x - \cos y| \leq \sin(1) |x - y|$ pour tous $x, y \in [0, 1]$.
- e. Pour tout n , u_n et α sont dans $[0, 1]$ et $\cos \alpha = \alpha$, donc

$$|u_{n+1} - \alpha| = |\cos u_n - \cos \alpha| \leq \sin(1) |u_n - \alpha|.$$

Par récurrence, $|u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n |u_0 - \alpha| \leq (\sin 1)^n$, car $|u_0 - \alpha| \leq 1$. Comme $0 < \sin 1 < 1$, $(\sin 1)^n$ tend vers 0. **Par le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers α .**

- f. Le cosinus est strictement décroissant sur $[0, 1]$. Supposons $u_n \neq \alpha$. Si $u_n > \alpha$, alors $u_{n+1} = \cos u_n < \cos \alpha = \alpha$; si $u_n < \alpha$, alors $u_{n+1} > \alpha$. Dans les deux cas, $u_{n+1} \neq \alpha$ et $u_{n+1} - \alpha$ et $u_n - \alpha$ **sont de signes contraires**. Comme $u_0 \neq \alpha$, une récurrence donne $u_n \neq \alpha$ **pour tout** n .
- g. On pose $\tau(x) = \frac{\cos x - \cos \alpha}{x - \alpha}$ pour $x \neq \alpha$. Le cosinus est dérivable en α , donc $\tau(x)$

tend vers $\cos'(\alpha) = -\sin \alpha$ quand x tend vers α . La suite (u_n) tend vers α sans jamais valoir α : par la caractérisation séquentielle de la limite, $\tau(u_n)$ tend vers $-\sin \alpha$. Or

$$\tau(u_n) = \frac{\cos u_n - \alpha}{u_n - \alpha} = \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}.$$

Donc $\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}$ tend vers $-\sin \alpha$.

- h. D'après f), les termes passent alternativement de part et d'autre de α : l'escalier tourne autour du point $(\alpha; \alpha)$, d'où la **spirale**. D'après g), l'écart à α est multiplié à chaque étape par un nombre proche de $\sin \alpha$, avec $\sin \alpha < \sin \frac{\pi}{4} < 1$: la spirale se resserre à vitesse géométrique (convergence linéaire, de rapport environ 0,67). Comme dans l'exercice 1, les termes de rang pair et ceux de rang impair restent chacun d'un même côté de la limite et l'encadrent.

Erreur fréquente : affirmer que (u_n) est monotone. Le cosinus étant décroissant sur $[0,1]$, la suite ne l'est pas : seules ses suites extraites de rangs pairs et impairs le sont.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la stricte monotonie, 0,5 point pour les signes, 0,5 point pour le théorème et l'unicité ; b) 1 point : 0,5 point par inégalité ; c) 1 point : 0,5 point pour $\cos 1 > 0$, 0,5 point pour la stabilité et la récurrence ; d) 1 point ; e) 1 point : 0,5 point pour la récurrence, 0,5 point pour la limite ; f) 1,5 point : 1 point pour les signes contraires, 0,5 point pour $u_n \neq \alpha$; g) 1,5 point : 0,5 point pour la fonction τ , 1 point pour la caractérisation séquentielle ; h) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : suites, continuité et dérivation

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Suites numériques » en L1](#) et [« Limites et continuité » en L1](#) et [« Dérivation » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [suites numériques](#), [limites et continuité](#), [dérivation](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : suites, convergence et suites adjacentes](#)
- [Contrôle de maths L1 : limites de fonctions et continuité](#)
- [Contrôle de maths L1 : dérivation, Rolle et accroissements finis](#)