

Corrigé du contrôle de maths L1 : réels, borne supérieure et partie entière

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : borne supérieure et propriété d'Archimède	4 points
Exercice 2 : Valeur absolue et partie entière	5 points
Exercice 3 : Bornes supérieures et inférieures	6 points
Exercice 4 : Problème : densité de $\mathbb{Q}$ et des irrationnels	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : borne supérieure et propriété d'Archimède (4 points)

- a. Supposons $M = \sup A$. Par définition, M est un majorant de A . Soit $\varepsilon > 0$: le réel $M - \varepsilon$ est strictement inférieur à M , le plus petit des majorants. Ce n'est donc pas un majorant de A : il existe $a \in A$ tel que $a > M - \varepsilon$.

Réciproquement, supposons que M majore A et vérifie la condition. Soit M' un majorant de A ; montrons par l'absurde que $M \leq M'$. Si $M' < M$, posons $\varepsilon = M - M' > 0$. Il existe alors $a \in A$ tel que $a > M - \varepsilon = M'$, ce qui contredit le fait que M' majore A .

Ainsi M est le plus petit des majorants : $M = \sup A$.

b. Énoncé : pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $x > 0$ et y réel tels que $nx \leq y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $F = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ est alors non vide et majoré par y . Il admet donc une borne supérieure M .

D'après a) avec $\varepsilon = x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > M - x$. Alors $(n+1)x > M$, alors que $(n+1)x$ appartient à F : c'est absurde. **La propriété d'Archimède est donc démontrée.**

Barème : a) 1 point par implication ; b) 0,5 point pour l'énoncé, 0,5 point pour l'ensemble majoré et sa borne supérieure, 1 point pour la contradiction.

Exercice 2 : Valeur absolue et partie entière (5 points)

a. D'après l'inégalité triangulaire, $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$, donc $|x| - |y| \leq |x - y|$. En échangeant les rôles de x et y , on obtient aussi $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$.

Les deux inégalités donnent $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

b. On distingue trois cas selon la position de x par rapport à -2 et 1 .

Si $x \geq 1$, l'inéquation s'écrit $2x + 1 \leq 5$, soit $x \leq 2$: on obtient $[1, 2]$.

Si $-2 \leq x < 1$, elle s'écrit $(1 - x) + (x + 2) = 3 \leq 5$, toujours vrai : on obtient $[-2, 1[$.

Si $x < -2$, elle s'écrit $-2x - 1 \leq 5$, soit $x \geq -3$: on obtient $[-3, -2[$.

L'ensemble des solutions est $[-3, 2]$.

c. Posons $m = E(x)$, de sorte que $m \leq x < m + 1$.

Si $x < m + \frac{1}{2}$, alors $2m \leq 2x < 2m + 1$, donc $E(2x) = 2m$ et la différence vaut 0.

Si $x \geq m + \frac{1}{2}$, alors $2m + 1 \leq 2x < 2m + 2$, donc $E(2x) = 2m + 1$ et la différence vaut 1.

Ainsi $E(2x) - 2E(x) \in \{0, 1\}$, et elle vaut 1 exactement lorsque $x - E(x) \geq \frac{1}{2}$.

d. Posons $m = E(x)$. De $m \leq x < m + 1$, on tire $nm \leq nx < nm + n$. Or nm est un entier inférieur ou égal à nx , donc $nm \leq E(nx)$. De plus,
 $E(nx) \leq nx < nm + n$.

En divisant par $n > 0$, on obtient $m \leq \frac{E(nx)}{n} < m + 1$. **Par définition de la partie entière,** $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = m = E(x)$.

Barème : a) 0,5 point par inégalité ; b) 0,25 point par cas, 0,25 point pour la réunion ; c) 0,5 point pour l'encadrement, 0,5 point par cas ; d) 1 point pour l'encadrement de $E(nx)$, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 3 : Bornes supérieures et inférieures (6 points)

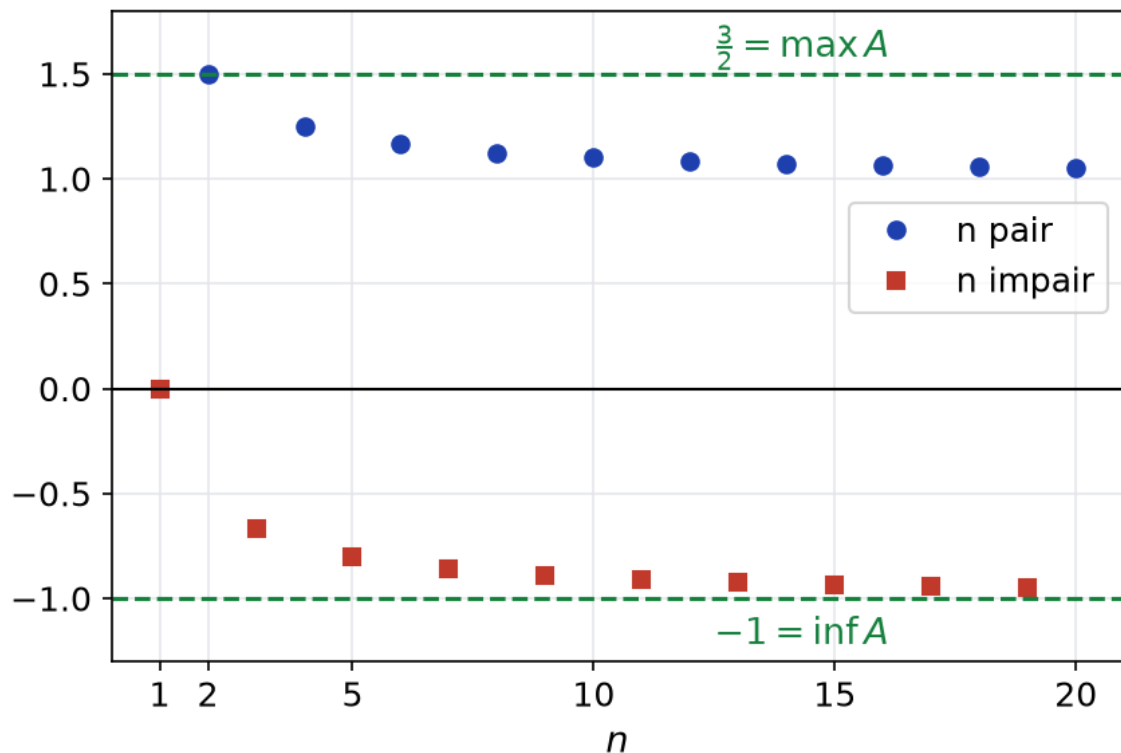
Question a : l'ensemble A

- a. Notons $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$. Si n est pair, $n \geq 2$, donc $u_n = 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$. Si n est impair, $u_n = -1 + \frac{1}{n} \leq 0$. Ainsi $\frac{3}{2}$ majore A ; de plus, $\frac{3}{2} = u_2 \in A$.

Donc $\frac{3}{2}$ est le plus grand élément de A . **Par conséquent, $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$, borne atteinte.**

Pour tout n , $\frac{1}{n} > 0$ et $(-1)^n \geq -1$, donc $u_n > -1$: -1 minore A et n'est pas atteint. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier $N \geq 1$ tel que $N\varepsilon > 1$. L'entier impair $n = 2N + 1$ vérifie alors $n > N$, donc $u_n = -1 + \frac{1}{n} < -1 + \varepsilon$.

D'après la caractérisation (version borne inférieure), $\inf A = -1$, **et cette borne n'est pas atteinte : A n'a pas de plus petit élément.**



Questions b et c : l'ensemble B et une somme d'ensembles

- b. Pour $x > 0$, on a $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$, donc $0 < \frac{x}{1+x} < 1$. Ainsi B est minoré par 0 et majoré par 1, et aucun de ces deux réels n'appartient à B .

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. D'une part, $x = \frac{1}{\varepsilon}$ donne $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon$. D'autre part, $x = \varepsilon$ donne $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \varepsilon$. Pour $\varepsilon \geq 1$, les mêmes éléments conviennent a fortiori.

Donc $\sup B = 1$ et $\inf B = 0$, et aucune des deux bornes n'est atteinte.

- c. L'ensemble $C + D$ est non vide. Pour $c \in C$ et $d \in D$, $c + d \leq \sup C + \sup D$: il est donc majoré et admet une borne supérieure. Montrons que $S = \sup C + \sup D$ vérifie la caractérisation.

D'abord, S majore $C + D$. Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in C$ tel que $c > \sup C - \frac{\varepsilon}{2}$, et $d \in D$ tel que $d > \sup D - \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $c + d \in C + D$ et $c + d > S - \varepsilon$.

Donc $\sup(C + D) = \sup C + \sup D$.

Erreur fréquente : confondre borne supérieure et plus grand élément. Dans B , la borne 1 existe sans appartenir à l'ensemble.

Barème : a) 1 point pour le maximum, 0,5 point pour le minorant, 1 point pour la preuve epsilon de la borne inférieure ; b) 0,5 point pour l'encadrement, 0,75 point pour chaque borne avec epsilon ; c) 0,5 point pour l'existence, 1 point pour la caractérisation.

Exercice 4 : Problème : densité de $\mathbb{Q}$ et des irrationnels (5 points)

- a. Comme $y - x > 0$, la propriété d'Archimède fournit un entier n tel que $n(y - x) > 1$, et nécessairement $n \geq 1$.

Posons $p = E(nx) + 1$, qui est un entier. Par définition de la partie entière, $E(nx) \leq nx < E(nx) + 1$. On a donc $nx < p$, et $p \leq nx + 1 < nx + n(y - x) = ny$.

En divisant par $n > 0$: $x < \frac{p}{n} < y$. **Le rationnel $r = \frac{p}{n}$ appartient donc à $]x, y[$.**

- b. Construisons une suite de rationnels par récurrence. D'après a), il existe $r_1 \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r_1 < y$. Si r_k est construit avec $x < r_k$, on applique a) à $x < r_k$: on obtient

$r_{k+1} \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r_{k+1} < r_k$.

La suite (r_k) est strictement décroissante, donc ses termes sont deux à deux distincts.

L'intervalle $]x, y[$ contient donc une infinité de rationnels.

- c. On applique a) aux réels $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$: il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2}$, donc $x < r + \sqrt{2} < y$.

Si $r + \sqrt{2}$ était rationnel, $\sqrt{2} = (r + \sqrt{2}) - r$ serait rationnel, comme différence de deux rationnels. C'est faux. **Donc $r + \sqrt{2}$ est un irrationnel de $]x, y[$.**

- d. Soit t un réel. Supposons par l'absurde $f(t) < t$. D'après a), il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $f(t) < r < t$. Comme f est croissante et $r < t$, on a $f(r) \leq f(t)$, soit $r \leq f(t)$: cela contredit $f(t) < r$.

De même, si $f(t) > t$, on choisit $r \in \mathbb{Q}$ tel que $t < r < f(t)$. Alors $f(t) \leq f(r) = r$, ce qui est absurde. **Donc $f(t) = t$ pour tout réel t : f est l'identité.**

Barème : a) 0,5 point pour Archimède, 1 point pour l'encadrement de p , 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point pour la construction, 0,5 point pour le caractère infini ; c) 0,5 point pour la translation, 0,5 point pour l'irrationalité ; d) 0,5 point par cas.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : réels, borne supérieure et partie entière

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Nombres réels » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [nombres réels](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).