

Corrigé du contrôle de maths L1 : récurrence, sommes et coefficients binomiaux

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : formule de Pascal et binôme de Newton	4 points
Exercice 2 : Trois récurrences	5 points
Exercice 3 : Calculs de sommes	5 points
Exercice 4 : Problème : dénombrer des couples de parties	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : formule de Pascal et binôme de Newton (4 points)

a. Soit $1 \leq k \leq n$. On met les deux fractions au même dénominateur $k! (n-k+1)!$:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k+1)!} + \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n! k + n! (n-k+1)}{k! (n-k+1)!}.$$

Le numérateur vaut $n! (n+1) = (n+1)!$. **Donc**

$$[\text{?}](\binom{n}{k-1} \rightarrow) + \binom{n}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = [\text{?}](\binom{n+1}{k} \rightarrow) .$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, les deux membres valent 1, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Alors

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

Dans la première somme, on pose $j = k+1$: elle devient

$\sum_{j=1}^{n+1} [\text{?}](\binom{n}{j-1} \rightarrow) a^j b^{n+1-j}$. On isole ensuite le terme $j = n+1$ de la première somme et le terme $k = 0$ de la seconde :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left([\text{?}](\binom{n}{k-1} \rightarrow) + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}.$$

D'après la formule de Pascal, la parenthèse vaut $[\text{?}](\binom{n+1}{k} \rightarrow)$. Or

$$[\text{?}](\binom{n+1}{0} \rightarrow) = [\text{?}](\binom{n+1}{n+1} \rightarrow) = 1, \text{ donc}$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} [\text{?}](\binom{n+1}{k} \rightarrow) a^k b^{n+1-k} : \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.}$$

Par récurrence, la formule du binôme est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a utilisé la commutativité du produit des complexes.

Barème : a) 1 point pour le calcul, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point pour l'énoncé de la propriété et l'initialisation, 1 point pour le développement et le changement d'indice, 0,5 point pour l'usage de Pascal, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 2 : Trois récurrences (5 points)

a. Notons $\mathcal{P}(n)$ l'égalité demandée. Pour $n = 1$, on a $1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

C'est exactement $\mathcal{P}(n+1)$. **Par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.**

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{Q}(n)$: « $u_n = 2^n + 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 1$ ».

Initialisation : $u_0 = 2 = 2^0 + 1$ et $u_1 = 3 = 2^1 + 1$, donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons $\mathcal{Q}(n)$. Alors

$$u_{n+2} = 3(2^{n+1} + 1) - 2(2^n + 1) = 3 \times 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 = 2^{n+2} + 1. \text{ Avec } u_{n+1} = 2^{n+1} + 1, \text{ on obtient } \mathcal{Q}(n+1).$$

Par récurrence, $u_n = 2^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- c. Pour $n \geq 2$, notons $\mathcal{R}(n)$: « tout entier m tel que $2 \leq m \leq n$ admet un diviseur premier ».

Initialisation : 2 est premier et se divise lui-même, donc $\mathcal{R}(2)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{R}(n)$ soit vraie. Il suffit d'étudier l'entier $n+1$. S'il est premier, il est son propre diviseur premier. Sinon, il s'écrit $n+1 = ab$ avec $2 \leq a \leq n$. Par hypothèse de récurrence, a admet un diviseur premier p , et comme a divise $n+1$, p divise $n+1$. Ainsi $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence forte, tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

Erreur fréquente : en b), n'initialiser qu'au rang 0. Une récurrence double exige les deux premiers termes.

Barème : a) 0,5 point pour l'initialisation, 1 point pour l'hérédité ; b) 0,5 point pour la propriété double et l'initialisation, 1 point pour le calcul de l'hérédité ; c) 0,5 point pour la propriété de récurrence forte, 0,5 point pour l'initialisation et le cas premier, 1 point pour le cas composé.

Exercice 3 : Calculs de sommes (5 points)

- a. On a $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$, donc $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. La somme est alors télescopique :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

La somme vaut $\frac{n}{n+1}$.

- b. Le changement d'indice $j = n-k$ parcourt aussi $\{0, \dots, n\}$. Par symétrie, $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$, donc

$$S_n = \sum_{j=0}^n (n-j) \binom{n}{j} = n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} - S_n = n2^n - S_n,$$

car $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = (1+1)^n = 2^n$ d'après la formule du binôme. Ainsi $2S_n = n2^n$. **Donc**
 $S_n = n2^{n-1}$.

- c. Pour $1 \leq k \leq n$: $k \binom{n}{k} = \frac{k n!}{k! (n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Le terme $k=0$ étant nul, on obtient, en posant $j = k-1$:

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \binom{n-1}{j} = n(S_{n-1} + 2^{n-1}).$$

Comme $n-1 \geq 1$, la question b) donne $S_{n-1} = (n-1)2^{n-2}$. Donc la somme vaut

$n((n-1)2^{n-2} + 2 \times 2^{n-2})$. **Ainsi** $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$. Vérification pour $n=2$: $0 + 2 + 4 = 6 = 2 \times 3 \times 1$.

- d. Posons $w_k = (k-1)k(k+1)$. Alors

$w_{k+1} - w_k = k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) = 3k(k+1)$. En sommant de $k=1$ à n , les termes se télescopent :

$$3 \sum_{k=1}^n k(k+1) = w_{n+1} - w_1 = n(n+1)(n+2) - 0.$$

Donc $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Pour $n = 2$, on retrouve $2 + 6 = 8$.

Barème : a) 0,5 point pour la décomposition, 0,5 point pour le télescope ; b) 1 point pour le changement d'indice et la symétrie, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point pour l'identité, 1 point pour le calcul de la somme ; d) 0,5 point pour le télescope, 0,5 point pour le résultat.

Exercice 4 : Problème : dénombrer des couples de parties (6 points)

a. Une p -liste est un élément de E^p : il y a n choix pour chaque coordonnée, donc n^p **listes**. Pour une liste d'éléments distincts, il y a n choix pour le premier, $n-1$ pour le second, et ainsi de suite jusqu'à $n-p+1$ pour le dernier. **On obtient** $n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ **arrangements**.

b. Fixons $k \in \{0, \dots, n\}$. Il y a $\binom{n}{k}$ parties B de cardinal k , et pour chacune, A est une partie quelconque de B : il y en a 2^k . En sommant sur k , $N = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$.

Par la formule du binôme avec $a = 2$ et $b = 1$: $N = (2+1)^n$. **Donc** $N = 3^n$.

c. À un couple (A, B) avec $A \subset B$, associons l'application $\chi : E \rightarrow \{0, 1, 2\}$ définie par $\chi(x) = 2$ si $x \in A$, $\chi(x) = 1$ si $x \in B \setminus A$, et $\chi(x) = 0$ si $x \notin B$.

Cette correspondance est bijective : à une application χ , on associe réciproquement $A = \chi^{-1}(\{2\})$ et $B = \chi^{-1}(\{1,2\})$, qui vérifient $A \subset B$. Or il y a 3^n applications de E dans un ensemble à trois éléments. **On retrouve $N = 3^n$.**

d. La condition $A \cap B = \emptyset$ équivaut à $A \subset \overline{B}$. L'application $(A,B) \rightarrow (A, \overline{B})$ est donc une bijection des couples disjoints vers les couples (A,C) tels que $A \subset C$. Elle est d'ailleurs sa propre réciproque. **Il y a donc 3^n couples de parties disjointes.**

e. On applique la formule à A et $B \cup C$, puis à B et C , en utilisant la distributivité $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Comme $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$, on obtient

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card } A + \text{card } B + \text{card } C - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C).$$

Notons D_d l'ensemble des multiples de d entre 1 et 300 ; il contient $\frac{300}{d}$ éléments lorsque d divise 300. Un entier est divisible par 2 et 3 si et seulement s'il l'est par 6, car 2 et 3 sont premiers entre eux ; de même pour les autres intersections. Ainsi :

$$\text{card}(D_2 \cup D_3 \cup D_5) = 150 + 100 + 60 - 50 - 30 - 20 + 10 = 220.$$

Entre 1 et 300, il y a 220 entiers divisibles par 2, par 3 ou par 5.

Barème : a) 0,5 point par dénombrement ; b) 1 point pour la somme justifiée, 0,5 point pour le binôme ; c) 0,5 point pour la construction, 0,5 point pour la bijectivité ; d) 0,5 point pour l'équivalence, 0,5 point pour la bijection et le résultat ; e) 0,75 point pour la formule démontrée, 0,75 point pour le calcul.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : récurrence, sommes et coefficients binomiaux

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Récurrence et dénombrement](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [récurrence et dénombrement](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).