

Corrigé du contrôle de maths L1 : probabilités finies, Bayes et loi binomiale

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : probabilités totales et formule de Bayes	3 points
Exercice 2 : Tirages simultanés dans une urne	4 points
Exercice 3 : Un test de dépistage	5 points
Exercice 4 : Indépendance deux à deux et mutuelle	3 points
Exercice 5 : Problème : répondre au hasard à un QCM	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : probabilités totales et formule de Bayes (3 points)

a.

Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion vaut Ω . Donc

$B = B \cap \Omega = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$, et les événements $B \cap A_i$ sont deux à deux incompatibles.

Par additivité de P , on obtient $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$. Ensuite, par définition de la probabilité conditionnelle, $P(B \cap A_i) = P(A_i) P_{A_i}(B)$, car $P(A_i) > 0$. Ainsi $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P_{A_i}(B)$.

b.

Formule de Bayes : si $P(B) > 0$, alors pour tout j ,

$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j) P_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P_{A_i}(B)}.$$

Démonstration : par définition, $P_B(A_j) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$. D'une part, $P(A_j \cap B) = P(A_j) P_{A_j}(B)$. D'autre part, le dénominateur est donné par la question a. **La formule est donc démontrée.**

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la partition de B , 0,5 point pour l'additivité, 0,5 point pour les probabilités conditionnelles ; b) 1,5 point : 0,5 point pour l'énoncé avec l'hypothèse $P(B) > 0$, 1 point pour la démonstration.

Exercice 2 : Tirages simultanés dans une urne (4 points)

a.

On numérote les boules de 1 à 10 (les rouges de 1 à 4). Un tirage est une partie à 3 éléments de

$\left\{ \begin{matrix} 1, \\ \text{fs}4\dots, 10 \end{matrix} \right\}$. **Donc** Ω est l'ensemble de ces parties, et $\text{card } \Omega = \binom{10}{3} = 120$. Les boules sont indiscernables au toucher : tous les tirages ont la même chance. On munit donc Ω de la probabilité uniforme.

b.

D'abord, il y a $\binom{4}{3} = 4$ tirages de trois rouges. **Donc** $P(Y = 3) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$.

Ensuite, un tirage avec exactement une rouge s'obtient en choisissant une rouge parmi 4, puis deux noires parmi 6 : $4 \times \binom{6}{2} = 4 \times 15 = 60$ tirages. **Donc** $P(Y = 1) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$.

Enfin, l'événement contraire de « au moins une rouge » est « trois noires », qui compte $\binom{6}{3} = 20$ tirages. **Donc** $P(Y \geq 1) = 1 - \frac{20}{120} = \frac{5}{6}$.

c.

Il reste $P(Y = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$, et $P(Y = 0) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

k	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

Vérification : $20 + 60 + 36 + 4 = 120$. Ensuite :

$$E(Y) = \frac{0 \times 20 + 1 \times 60 + 2 \times 36 + 3 \times 4}{120} = \frac{144}{120} = \frac{6}{5}.$$

Donc $E(Y) = \frac{6}{5}$. C'est bien $3 \times \frac{4}{10}$: chaque boule tirée est rouge avec probabilité $\frac{4}{10}$.

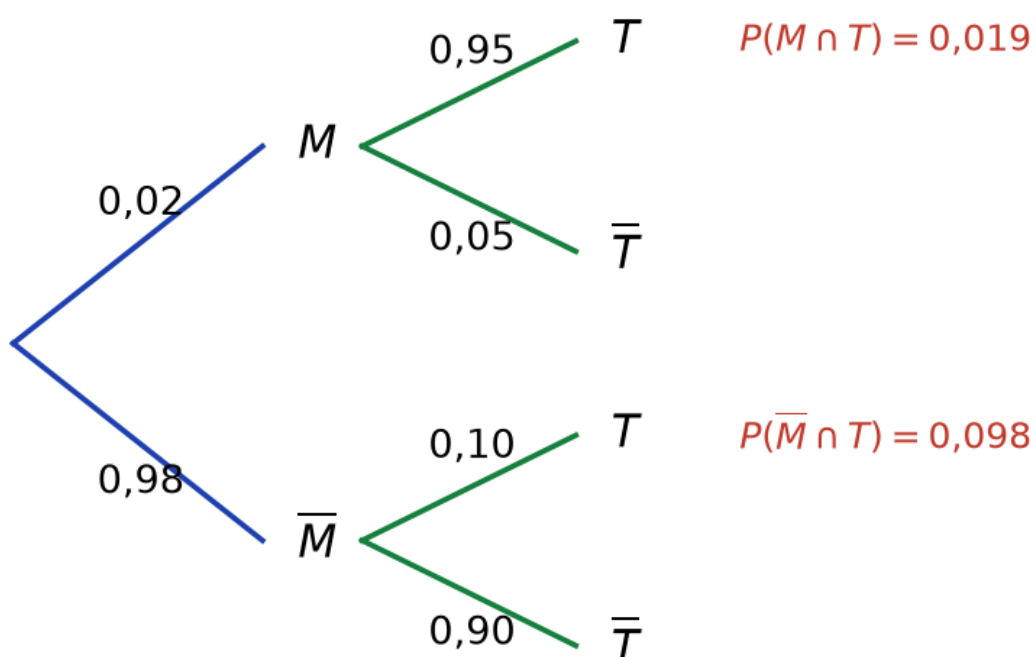
Erreur fréquente : compter des tirages ordonnés au numérateur et non ordonnés au dénominateur. Il faut garder le même modèle partout.

Barème : a) 0,5 point ; b) 2 points : 0,5 point pour trois rouges, 1 point pour exactement une rouge, 0,5 point pour au moins une rouge ; c) 1,5 point : 1 point pour la loi, 0,5 point pour l'espérance.

Exercice 3 : Un test de dépistage (5 points)

a.

D'après l'énoncé, $P(M) = 0,02$, $P_M(T) = 0,95$ et $P_{\bar{M}}(T) = 0,10$. On en déduit l'arbre suivant.



b.

Les événements M et $\overline{M}$ forment un système complet. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,10 = 0,019 + 0,098.$$

Donc $P(T) = 0,117$.

c.

D'après la formule de Bayes :

$$P_T(M) = \frac{P(M) P_M(T)}{P(T)} = \frac{0,019}{0,117} = \frac{19}{117}.$$

Donc $P_T(M) = \frac{19}{117} \approx 0,16$. Ainsi, environ 84 % des tests positifs concernent des personnes saines. En effet, la maladie est rare, donc les faux positifs sont nombreux par rapport aux vrais positifs.

d.

D'abord, par indépendance conditionnelle, $P_M(T_1 \cap T_2) = 0,95^2 = 0,9025$ et $P_{\overline{M}}(T_1 \cap T_2) = 0,10^2 = 0,01$. Par la formule des probabilités totales :

$$P(T_1 \cap T_2) = 0,02 \times 0,9025 + 0,98 \times 0,01 = 0,01805 + 0,0098 = 0,02785.$$

Ensuite, la formule de Bayes donne $P_{T_1 \cap T_2}(M) = \frac{0,01805}{0,02785} = \frac{1805}{2785} = \frac{361}{557}$.

Donc $P_{T_1 \cap T_2}(M) = \frac{361}{557} \approx 0,65$. Le second test positif rend la maladie probable. C'est pourquoi on confirme toujours un dépistage positif.

Erreur fréquente : confondre $P_T(M)$ avec $P_M(T) = 0,95$.

Barème : a) 1 point ; b) 1 point : 0,5 point pour la formule citée, 0,5 point pour le résultat ; c) 1,5 point : 1 point pour Bayes, 0,5 point pour la valeur approchée et le commentaire ; d) 1,5 point : 0,5 point pour l'indépendance conditionnelle, 0,5 point pour $P(T_1 \cap T_2)$, 0,5 point pour le résultat.

Exercice 4 : Indépendance deux à deux et mutuelle (3 points)

a.

On prend $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ muni de la probabilité uniforme, car la pièce est équilibrée et les lancers indépendants. Alors $A = \{PP, PF\}$, $B = \{PP, FP\}$ et $C = \{PP, FF\}$. Chacun a pour probabilité $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Ensuite, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{PP\}$, de probabilité $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. **Donc** A , B et C sont deux à deux indépendants.

b.

On a $A \cap B \cap C = \{PP\}$, donc $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$. Or $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$. **Les événements ne sont donc pas mutuellement indépendants.** En effet, si A et B sont réalisés, alors C l'est forcément.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour l'univers et les événements, 1 point pour les trois égalités ; b) 1,5 point : 1 point pour le calcul, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 5 : Problème : répondre au hasard à un QCM (5 points)

a.

Chaque question est une épreuve de Bernoulli de succès « bonne réponse », de probabilité $\frac{1}{4}$. On répète 10 fois cette épreuve de façon indépendante, et X compte les succès. **Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{4}\right)$, et pour $k \in \left\{0, 1, \dots, 10\right\}$:**

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}.$$

En particulier, $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$.

b.

On note X_i la variable qui vaut 1 si la réponse à la question i est juste, et 0 sinon. Chaque X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{4}$: $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1 - p) = \frac{3}{16}$. De plus, $X = X_1 + \dots + X_{10}$.

Par linéarité de l'espérance, $E(X) = 10 \times \frac{1}{4}$. Ensuite, les X_i sont indépendantes, donc la variance de leur somme est la somme des variances : $V(X) = 10 \times \frac{3}{16}$. **Ainsi $E(X) = \frac{5}{2}$ et $V(X) = \frac{15}{8}$.**

c.

L'étudiant a X bonnes réponses et $10 - X$ mauvaises. Donc

$S = 3X - (10 - X) = 4X - 10$. Par linéarité, $E(S) = 4 \times \frac{5}{2} - 10 = 0$. Ensuite,
 $V(S) = 4^2 V(X) = 16 \times \frac{15}{8} = 30$.

Donc $S = 4X - 10$, $E(S) = 0$ **et** $V(S) = 30$. En moyenne, répondre au hasard ne rapporte rien : le barème est dissuasif.

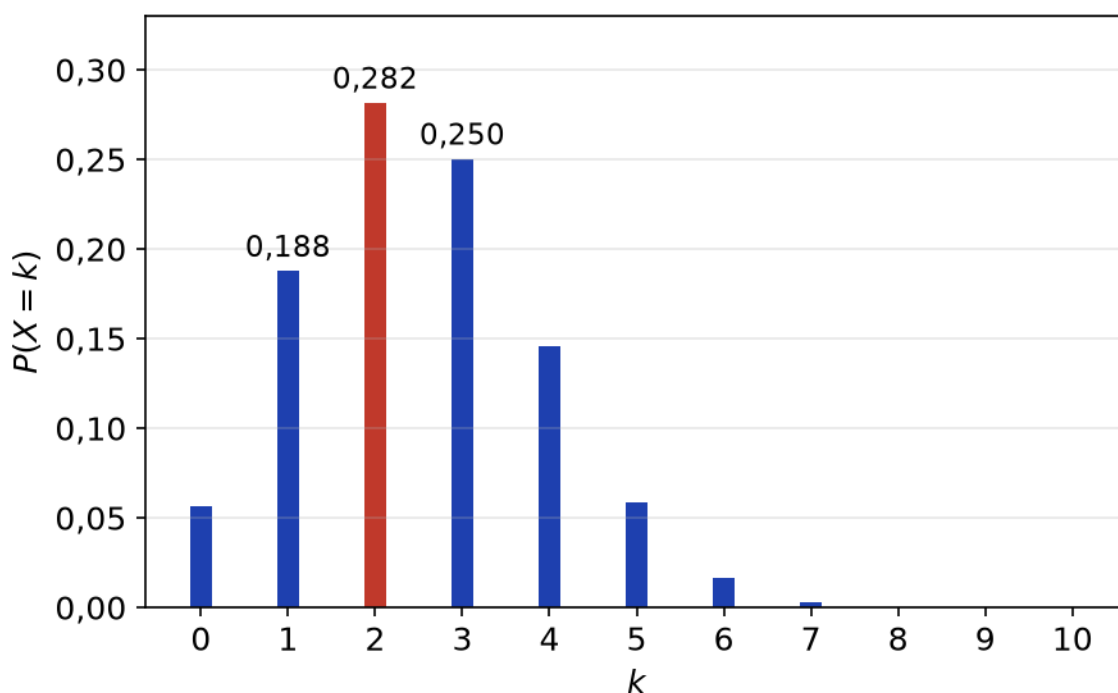
d.

Pour $k \in \{0, \dots, 9\}$, on a $\binom{10}{k+1} = \binom{10}{k} \times \frac{10-k}{k+1}$. Donc :

$$\frac{P(X = k+1)}{P(X = k)} = \frac{10-k}{k+1} \times \frac{1/4}{3/4} = \frac{10-k}{3(k+1)}.$$

Ce quotient est strictement supérieur à 1 si et seulement si $10 - k > 3k + 3$, c'est-à-dire $k < \frac{7}{4}$, soit $k \in \{0, 1\}$. Pour $k \geq 2$, il est strictement inférieur à 1 (il ne vaut jamais 1, car $\frac{7}{4}$ n'est pas entier).

Ainsi $P(X = 0) < P(X = 1) < P(X = 2)$, puis la suite décroît strictement. **La probabilité $P(X = k)$ est maximale pour $k = 2$.**



Erreur fréquente : écrire $V(4X - 10) = 4 V(X) - 10$. En réalité, $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour la justification, 0,5 point pour les formules ; b) 1,5 point : 0,5 point pour la décomposition, 0,5 point pour l'espérance, 0,5 point pour la variance avec l'indépendance citée ; c) 1 point : 0,5 point pour S et $E(S)$, 0,5 point pour $V(S)$; d) 1,5 point : 0,5 point pour le quotient, 0,5 point pour l'inégalité, 0,5 point pour la conclusion.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : probabilités finies, Bayes et loi binomiale

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Probabilités finies](#) » en L1 puis entraînez-

vous avec les **exercices corrigés** [probabilités finies](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).