

Corrigé du contrôle de maths L1 : polynômes, racines et fractions rationnelles

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : racines multiples et dérivées	3 points
Exercice 2 : Division euclidienne et ordre de multiplicité	4 points
Exercice 3 : Relations entre coefficients et racines	3 points
Exercice 4 : Factorisation de $X^4 + 1$	3 points
Exercice 5 : Problème : restes et éléments simples	7 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : racines multiples et dérivées (3 points)

a. **Formule de Taylor pour les polynômes.** Si P est de degré d , alors

$$P = \sum_{k=0}^d \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

b. Supposons $P(a) = P'(a) = 0$. Les deux premiers termes de la formule de Taylor sont nuls, donc

$$P = (X-a)^2 \sum_{k=2}^d \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^{k-2},$$

ce qui montre que $(X-a)^2$ divise P : a est racine d'ordre au moins 2.

Réciproquement, si $P = (X-a)^2 Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(a) = 0$ et, en dérivant un produit, $P' = 2(X-a)Q + (X-a)^2 Q'$, d'où $P'(a) = 0$.

Donc a est racine d'ordre au moins 2 si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$.

Barème : a) 1 point ; b) 2 points (1 point pour chaque implication).

Exercice 2 : Division euclidienne et ordre de multiplicité (4 points)

a. On abaisse le degré terme à terme :

- $A - X^2 B = X^4 + 2X^3 - X + 3 - (X^4 + X^3 + X^2) = X^3 - X^2 - X + 3$;
- $X^3 - X^2 - X + 3 - X B = X^3 - X^2 - X + 3 - (X^3 + X^2 + X) = -2X^2 - 2X + 3$;
- $-2X^2 - 2X + 3 - (-2) B = -2X^2 - 2X + 3 + 2X^2 + 2X + 2 = 5$.

Le reste est de degré $0 < 2 = \deg B$. Ainsi $A = (X^2 + X - 2) B + 5$: **quotient $X^2 + X - 2$, reste 5**.

b. On calcule les dérivées successives :

$$P' = 5X^4 - 24X^3 + 39X^2 - 28X + 12, P'' = 20X^3 - 72X^2 + 78X - 28, P^{(3)} = 60X^2 - 144X + 78.$$

Puis $P(2) = 32 - 96 + 104 - 56 + 24 - 8 = 0$,

$$P'(2) = 80 - 192 + 156 - 56 + 12 = 0, \quad P''(2) = 160 - 288 + 156 - 28 = 0 \text{ et}$$

$$P^{(3)}(2) = 240 - 288 + 78 = 30 \neq 0. \text{ D'après la caractérisation par les dérivées}$$

successives, **2 est racine d'ordre exactement 3.**

Donc $(X-2)^3 = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$ divise P . Le quotient est unitaire de degré 2 ; en identifiant le coefficient constant, $-8 \times c = -8$, donc $c = 1$, et l'on vérifie que

$$(X^3 - 6X^2 + 12X - 8)(X^2 + 1) = X^5 - 6X^4 + 13X^3 - 14X^2 + 12X - 8.$$

Dans $\mathbb{R}[X]$: $P = (X-2)^3 (X^2+1)$, et $X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ (discriminant $-4 < 0$). **Dans $\mathbb{C}[X]$:** $P = (X-2)^3 (X-i)(X+i)$.

Barème : a) 1,5 point (1 pour les étapes, 0,5 pour le résultat) ; b) 2,5 points : 1,5 point pour les dérivées et l'ordre 3, 0,5 point pour la factorisation réelle, 0,5 point pour la factorisation complexe.

Exercice 3 : Relations entre coefficients et racines (3 points)

a. Pour $Q = X^3 - 2X^2 + 3X - 5$ unitaire, les relations entre coefficients et racines donnent

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3, \quad \sigma_3 = x_1x_2x_3 = 5.$$

Ensuite $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4 - 6 = -2$. **La somme des carrés vaut -2 .**

Si les trois racines étaient réelles, cette somme serait positive. **Les racines ne sont donc pas toutes réelles** ; comme Q est réel de degré impair, il a exactement une racine réelle et deux racines complexes conjuguées non réelles.

b. Aucune racine n'est nulle car $\sigma_3 = 5 \neq 0$. Alors

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2}{x_1 x_2 x_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{3}{5}.$$

La somme des inverses vaut $\frac{3}{5}$.

c. Chaque racine vérifie $x_j^3 = 2x_j^2 - 3x_j + 5$. En sommant pour $j = 1, 2, 3$:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2 \times (-2) - 3 \times 2 + 3 \times 5 = -4 - 6 + 15 = 5.$$

La somme des cubes vaut 5.

Erreur fréquente : écrire $\sigma_3 = -5$. Pour un polynôme unitaire de degré 3,
 $x_1 x_2 x_3 = (-1)^3 \times (-5) = 5$.

Barème : a) 1,5 point (0,75 pour les trois fonctions symétriques, 0,5 pour la somme des carrés, 0,25 pour la conclusion) ; b) 0,75 point ; c) 0,75 point.

Exercice 4 : Factorisation de $X^4 + 1$ (3 points)

a. On cherche $z = r e^{i\theta}$ avec $z^4 = -1 = e^{i\pi}$: il faut $r^4 = 1$, donc $r = 1$, et $4\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, soit $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Les racines sont $e^{i\pi/4}$, $e^{3i\pi/4}$, $e^{5i\pi/4} = e^{-3i\pi/4}$ et $e^{7i\pi/4} = e^{-i\pi/4}$, deux à deux distinctes. Le polynôme étant unitaire de degré 4 :

$$X^4 + 1 = (X - e^{i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4}).$$

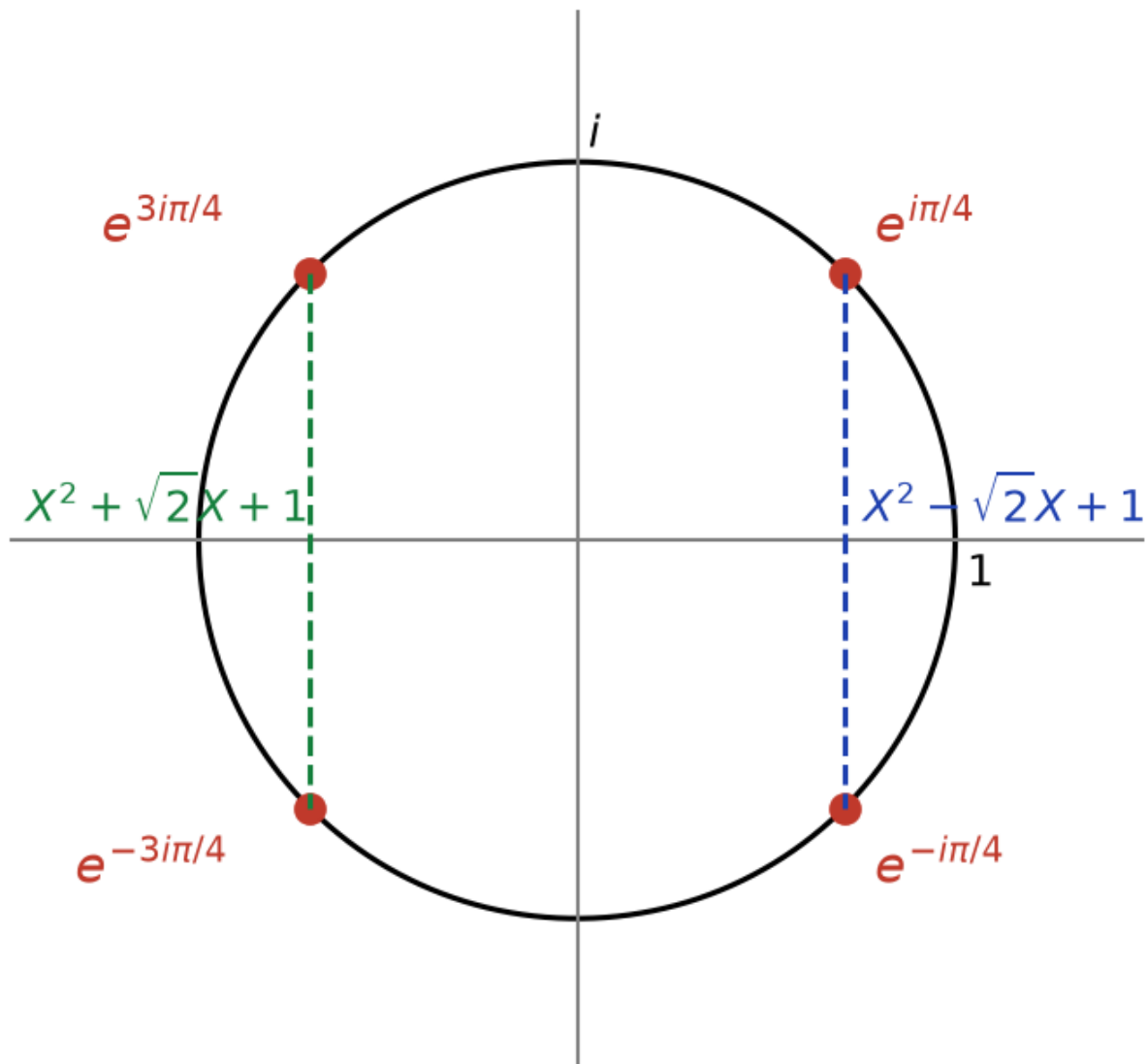
b. Pour θ réel, $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$. Avec $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2} X + 1)(X^2 + \sqrt{2} X + 1).$$

Les deux facteurs ont pour discriminant $2 - 4 = -2 < 0$: ils sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Vérification : le produit vaut $(X^2 + 1)^2 - 2X^2 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 = X^4 + 1$.

C'est la factorisation cherchée.



Barème : a) 1,5 point (1 pour les racines, 0,5 pour la factorisation) ; b) 1,5 point (1 pour le regroupement, 0,5 pour la vérification et l'irréductibilité).

Exercice 5 : Problème : restes et éléments simples (7 points)

Partie A.

- a. Le reste d'une division par $(X-1)^2$, de degré 2, est de degré au plus 1 : il s'écrit

$$R = aX + b. \text{ On a donc } X^n = (X-1)^2 Q + aX + b.$$

En évaluant en 1 : $1 = a + b$. En dérivant : $n X^{n-1} = 2(X-1) Q + (X-1)^2 Q' + a$,
puis en évaluant en 1 : $n = a$. Ainsi $b = 1 - n$.

Le reste est $R = nX + 1 - n$. Contrôle pour $n = 2$: $X^2 = (X-1)^2 + 2X - 1$.

Partie B.

- b. Le numérateur est de degré 2, strictement inférieur au degré 3 du dénominateur : la partie entière est nulle. La décomposition a la forme

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1}.$$

- En multipliant par $(X-1)^2$ puis en évaluant en 1 : $b = \frac{1+1}{1+1} = 1$.
- En multipliant par $X+1$ puis en évaluant en -1 : $c = \frac{1+1}{(-2)^2} = \frac{1}{2}$.
- En multipliant par X et en faisant tendre x vers $+\infty$: $1 = a + c$, donc $a = \frac{1}{2}$.

Contrôle en 0 : $F(0) = \frac{1}{1 \times 1} = 1$ et $-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 1$.

Conclusion :

$$F = \frac{1/2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1/2}{X+1}.$$

c. Dans $\mathbb{R}(X)$, $X^2 + 1$ est irréductible et $G = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2 + 1}$. En multipliant par X et en évaluant en 0 : $\alpha = 1$. Alors $\frac{\beta X + \gamma}{X^2 + 1} = \frac{1}{X(X^2 + 1)} - \frac{1}{X} = \frac{1 - X^2 - 1}{X(X^2 + 1)} = \frac{-X}{X^2 + 1}$.

$$G = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2 + 1}.$$

d. Dans $\mathbb{C}(X)$, $G = \frac{1}{X(X-i)(X+i)}$ n'a que des pôles simples :

$G = \frac{\alpha}{X} + \frac{\delta}{X-i} + \frac{\bar{\delta}}{X+i}$, les coefficients en i et $-i$ étant conjugués puisque G est à coefficients réels. On a $\alpha = 1$ et

$$\delta = \frac{1}{i(i+i)} = \frac{1}{2i^2} = -\frac{1}{2}, \quad \bar{\delta} = -\frac{1}{2}.$$

$$G = \frac{1}{X} - \frac{1/2}{X-i} - \frac{1/2}{X+i}. \text{ On retrouve bien c) car } \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i} = \frac{2X}{X^2+1}.$$

Barème : a) 2 points (0,5 pour la forme du reste, 0,5 pour $a + b = 1$, 1 pour la dérivation) ; b) 2,5 points (0,5 pour la partie entière et la forme, 0,5 par coefficient, 0,5 pour le contrôle) ; c) 1 point ; d) 1,5 point (0,5 pour la forme, 1 pour les coefficients).

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : polynômes, racines et fractions rationnelles

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Polynômes](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [polynômes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : polynômes, arithmétique et nombres complexes](#)