

Corrigé du contrôle de maths L1 : polynômes, arithmétique et nombres complexes

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : racines n -ièmes de l'unité	3 points
Exercice 2 : Factorisation de $X^6 - 1$	4 points
Exercice 3 : Algorithme d'Euclide pour les polynômes et les entiers	5 points
Exercice 4 : Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers	4 points
Exercice 5 : Problème : une équation du troisième degré et $\cos(\pi/9)$	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : racines n -ièmes de l'unité (3 points)

a. Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Alors $|z|^n = |z^n| = 1$, et comme $|z| \geq 0$, $|z| = 1$. On écrit $z = e^{i\theta}$: $z^n = e^{in\theta} = 1$ équivaut à $n\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, soit $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En écrivant la division euclidienne $k = nq + r$ avec $0 \leq r \leq n-1$, on a $e^{2ik\pi/n} = e^{2iq\pi} e^{2ir\pi/n} = e^{2ir\pi/n}$.

Réciproquement, $(e^{2ik\pi/n})^n = e^{2ik\pi} = 1$. Enfin, pour $0 \leq k < l \leq n-1$, les arguments $\frac{2k\pi}{n}$ et $\frac{2l\pi}{n}$ diffèrent d'un nombre de $]0, 2\pi[$, donc les deux nombres sont distincts. $\mathbb{U}_n$ est formé des n nombres distincts $e^{2ik\pi/n}$, $0 \leq k \leq n-1$.

- b. Posons $\omega = e^{2i\pi/n}$. Pour $n \geq 2$, $\omega \neq 1$, et la somme des termes d'une suite géométrique donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = \frac{1 - 1}{1 - \omega} = 0.$$

La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle pour $n \geq 2$.

Barème : a) 1,5 point (0,5 pour le module, 0,5 pour les arguments, 0,5 pour la réciproque et la distinction)
; b) 1,5 point (0,5 pour $\omega \neq 1$, 1 pour le calcul).

Exercice 2 : Factorisation de $X^6 - 1$ (4 points)

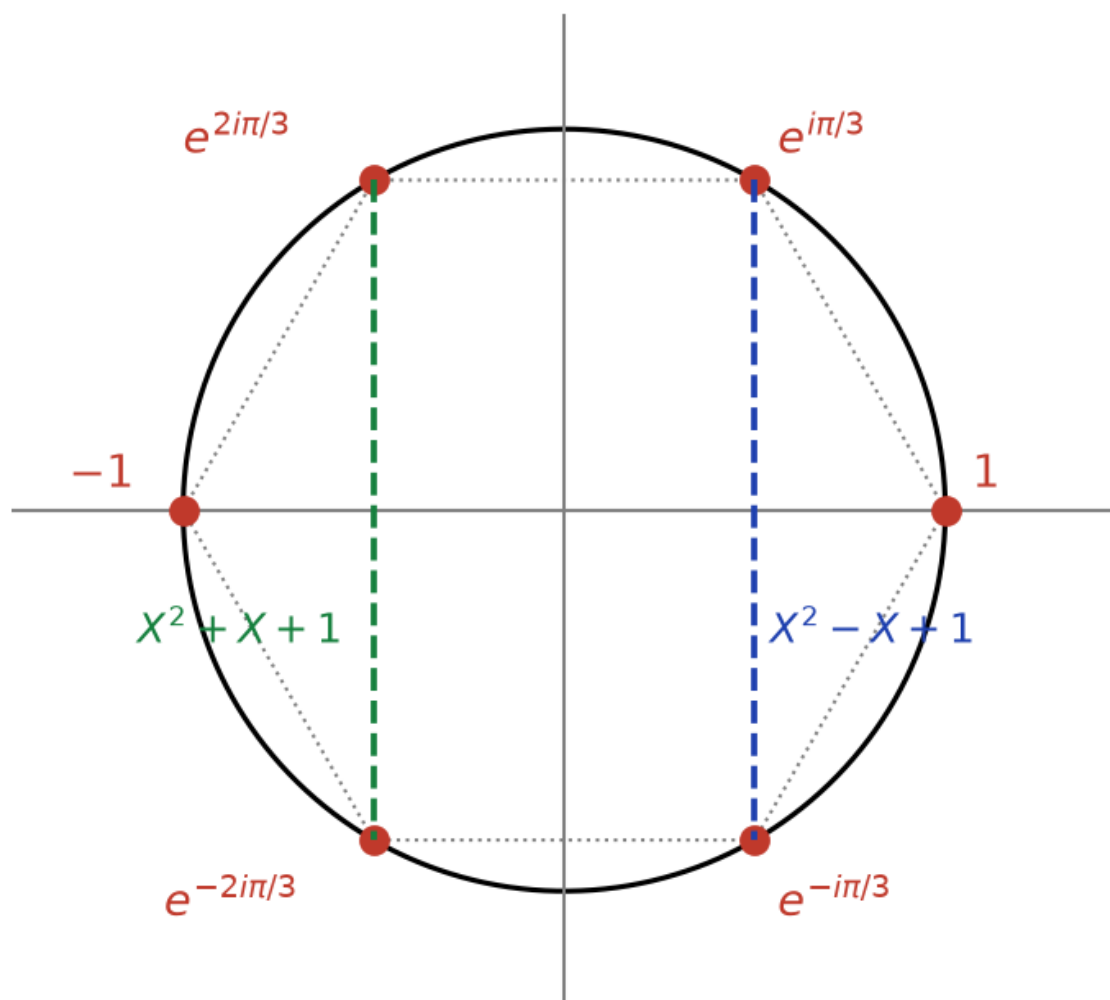
- a. Les racines de $X^6 - 1$ sont les six éléments distincts de $\mathbb{U}_6$: $1, e^{i\pi/3}, e^{2i\pi/3}, -1, e^{-2i\pi/3}, e^{-i\pi/3}$. Le polynôme étant unitaire de degré 6 :

$$X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})(X - e^{2i\pi/3})(X - e^{-2i\pi/3}).$$

- b. Pour θ réel, $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$. Avec $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$:

$$X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1).$$

Les deux trinômes ont pour discriminant $-3 < 0$: **ils sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, et c'est la factorisation cherchée.**



- c. On a $X^6 - 1 = (X^2)^3 - 1 = (X^2 - 1)(X^4 + X^2 + 1)$ et $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.
En comparant avec b) et en simplifiant par le polynôme non nul $X^2 - 1$ (l'anneau $\mathbb{R}[X]$ est intègre) :

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1).$$

Vérification : $(X^2 + 1 - X)(X^2 + 1 + X) = (X^2 + 1)^2 - X^2 = X^4 + X^2 + 1$. **La factorisation est établie.**

Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point (1 pour le regroupement, 0,5 pour l'irréductibilité) ; c) 1,5 point (1 pour la simplification justifiée, 0,5 pour la vérification).

Exercice 3 : Algorithme d'Euclide pour les polynômes et les entiers (5 points)

a. Première division :

$$(X - 2) B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X - 2X^3 - 4X^2 - 4X - 2 = X^4 - 2X^2 - 3X - 2, \text{ donc}$$

$$A = (X - 2) B + R_1, \quad R_1 = 2X^2 + 3X + 1.$$

Deuxième division, de B par R_1 :

$$\left(\frac{X}{2} + \frac{1}{4}\right) R_1 = X^3 + \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{4}X + \frac{1}{4} = X^3 + 2X^2 + \frac{5}{4}X + \frac{1}{4}, \text{ donc}$$

$$B = \left(\frac{X}{2} + \frac{1}{4}\right) R_1 + R_2, \quad R_2 = \frac{3}{4}X + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(X + 1).$$

$$\text{Troisième division : } R_1 = (2X + 1)(X + 1) = \frac{4}{3}(2X + 1) R_2 + 0.$$

Le dernier reste non nul est R_2 , et le pgcd unitaire est obtenu en le normalisant.

$$D = X + 1. \text{ On le confirme par les factorisations } A = (X-1)(X+1)(X^2+1) \text{ et}$$

$$B = (X+1)(X^2+X+1).$$

- b. D'après a), $A = (X+1) A_1$ et $B = (X+1) B_1$ avec $A_1 = (X-1)(X^2+1)$ et $B_1 = X^2 + X + 1$, qui sont à coefficients entiers. Pour tout entier n ,
 $A(n) = (n+1) A_1(n)$ et $B(n) = (n+1) B_1(n)$ avec $A_1(n), B_1(n) \in \mathbb{Z}$. **Ainsi $n + 1$ est un diviseur commun de $A(n)$ et $B(n)$, donc il divise leur pgcd.**

- c. $9999 = 8 \times 1221 + 231$, $1221 = 5 \times 231 + 66$, $231 = 3 \times 66 + 33$,
 $66 = 2 \times 33 + 0$. $\text{pgcd}(9999, 1221) = 33$.

- d. On a $D(10) = 11$ et $\text{pgcd}(9999, 1221) = 33 = 3 \times 11$. Conformément à b), 11 divise 33, mais l'égalité est fautive : **le pgcd des valeurs peut être un multiple strict de la valeur du pgcd.** Ici $A_1(10) = 909 = 9 \times 101$ et $B_1(10) = 111 = 3 \times 37$ ont le facteur commun 3, alors que A_1 et B_1 sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$.

Erreur fréquente : garder $R_2 = \frac{3}{4}(X+1)$ comme pgcd ; le pgcd de deux polynômes est défini comme unitaire.

Barème : a) 2,5 points (0,75 par division, 0,25 pour la normalisation) ; b) 1 point ; c) 1 point ; d) 0,5 point.

Exercice 4 : Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers (4 points)

a. De $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, on tire après multiplication par q^n :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Tous les termes sauf le dernier sont multiples de p , donc p divise $a_0 q^n$. Comme $\text{pgcd}(p, q) = 1$, on a aussi $\text{pgcd}(p, q^n) = 1$ (un diviseur premier commun à p et q^n diviserait q). D'après le lemme de Gauss, p **divise** a_0 .

De même, tous les termes sauf le premier sont multiples de q : q divise $a_n p^n$, et q est premier avec p^n . Le lemme de Gauss donne $q \mid a_n$.

b. Pour $P_1 = 2X^3 - 3X^2 - 3X + 2$, une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ vérifie $p \mid 2$ et $q \mid 2$: les candidats sont $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$. On calcule $P_1(1) = -2$,
 $P_1(-1) = -2 - 3 + 3 + 2 = 0$, $P_1(2) = 16 - 12 - 6 + 2 = 0$,
 $P_1(-2) = -16 - 12 + 6 + 2 = -20$, $P_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 2 = 0$ et
 $P_1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{5}{2}$.

Les racines rationnelles sont $-1, 2$ et $\frac{1}{2}$, et comme il y en a trois pour un degré 3, on obtient $P_1 = 2(X+1)(X-2)\left(X-\frac{1}{2}\right) = (X+1)(X-2)(2X-1)$. Contrôle :
 $(X^2 - X - 2)(2X - 1) = 2X^3 - 3X^2 - 3X + 2$.

c. Pour $Q = X^3 - 3X - 1$, les seuls candidats sont ± 1 . Or $Q(1) = -3$ et $Q(-1) = -1 + 3 - 1 = 1$. Q **n'a aucune racine rationnelle**.

Barème : a) 2 points (0,5 pour l'égalité multipliée par q^n , 0,75 par divisibilité justifiée par Gauss) ; b) 1,5 point (0,5 pour les candidats, 0,5 pour les tests, 0,5 pour la factorisation) ; c) 0,5 point.

Exercice 5 : Problème : une équation du troisième degré et $\cos(\pi/9)$ (4 points)

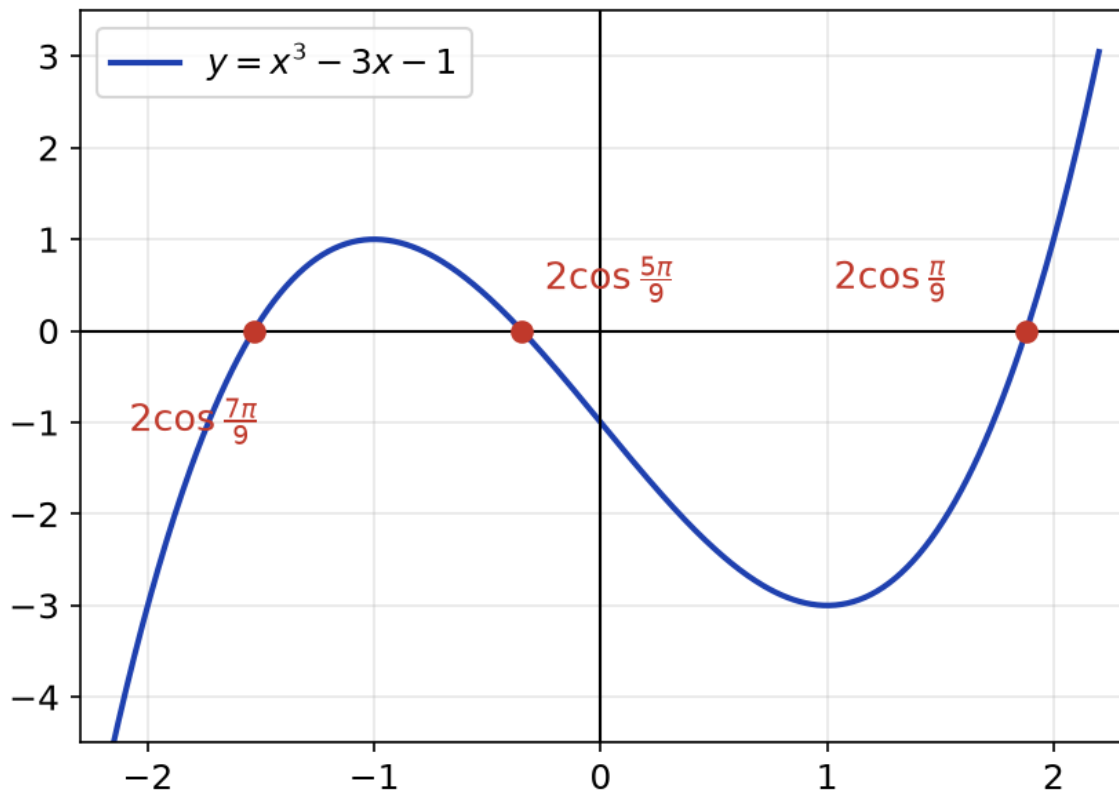
- a. Comme $\frac{1}{z} = e^{-i\theta}$, on a $x = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ (formule d'Euler). Par la formule du binôme,

$$x^3 = z^3 + 3z + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^3}, \text{ donc } x^3 - 3x = z^3 + \frac{1}{z^3} = e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} = 2\cos(3\theta).$$

On a bien $x^3 - 3x = 2\cos(3\theta)$.

- b. D'après a), $x = 2\cos\theta$ est racine de Q si et seulement si $2\cos(3\theta) = 1$, c'est-à-dire $\cos(3\theta) = \frac{1}{2}$. Or $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{7\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc $\theta = \frac{\pi}{9}$, $\frac{5\pi}{9}$ et $\frac{7\pi}{9}$ conviennent.

Ces trois angles appartiennent à $[0, \pi]$, où la fonction cosinus est strictement décroissante, donc les nombres $2\cos\frac{\pi}{9}$, $2\cos\frac{5\pi}{9}$, $2\cos\frac{7\pi}{9}$ sont deux à deux distincts. Un polynôme de degré 3 a au plus trois racines : **ce sont exactement les trois racines de Q** .



c. Si $\cos\frac{\pi}{9}$ était rationnel, $2\cos\frac{\pi}{9}$ serait une racine rationnelle de $\mathcal{Q}$, ce qui contredit l'exercice 4 c). **Donc $\cos\frac{\pi}{9}$ est irrationnel.**

d. La somme des racines de $\mathcal{Q}$ est l'opposé du coefficient de X^2 , qui est nul. Donc $2\cos\frac{\pi}{9} + 2\cos\frac{5\pi}{9} + 2\cos\frac{7\pi}{9} = 0$, et $\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} = 0$. (Contrôle approché : $0,940 - 0,174 - 0,766 = 0$.)

Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point (0,5 pour l'équation en θ , 0,5 pour les trois valeurs, 0,5 pour la distinction et le nombre de racines) ; c) 1 point ; d) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : polynômes, arithmétique et

nombre complexes

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Nombres complexes](#) » en L1 et « [Arithmétique dans \$\mathbb{Z}\$](#) » en L1 et « [Polynômes](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [nombres complexes](#), [arithmétique dans \$\mathbb{Z}\$](#) , [polynômes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : complexes, racines n-ièmes et trigonométrie](#)
- [Contrôle de maths L1 : arithmétique, Bézout, Gauss et congruences](#)
- [Contrôle de maths L1 : polynômes, racines et fractions rationnelles](#)