

Corrigé du contrôle de maths L1 : matrices, rang, trace et changement de base

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : changement de base et trace	3 points
Exercice 2 : Un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$	5 points
Exercice 3 : Rang d'une matrice à paramètre	4 points
Exercice 4 : Matrices semblables ou non	3 points
Exercice 5 : Problème : matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : changement de base et trace (3 points)

- a. La **matrice de passage** P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice dont la j -ième colonne contient les coordonnées, dans $\mathcal{B}$, du j -ième vecteur de $\mathcal{B}'$. Elle est inversible, et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. La formule de changement de base s'écrit alors

$$A' = P^{-1} A P.$$

- b. Notons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Le coefficient diagonal d'indice i de AB vaut $\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$. Donc

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} = \text{tr}(BA),$$

en échangeant l'ordre des deux sommes finies. **Ainsi** $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

c. Si $B = P^{-1} A P$, alors, avec b) appliqué aux matrices $P^{-1}A$ et P :

$$\text{tr}(B) = \text{tr}((P^{-1} A) P) = \text{tr}(P (P^{-1} A)) = \text{tr}(A).$$

Deux matrices semblables ont donc la même trace. Par ailleurs, si $AB - BA = I_n$, la linéarité de la trace donne $\text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = \text{tr}(I_n)$, soit $0 = n$. **C'est absurde car $n \geq 1$: une telle égalité est impossible.**

Barème : a) 1 point (0,5 pour la définition, 0,5 pour la formule) ; b) 1 point ; c) 1 point : 0,5 pour l'invariance, 0,5 pour l'impossibilité.

Exercice 2 : Un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (5 points)

a. Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $\deg P' \leq 1$, donc $\deg((X-1)P') \leq 2$: φ envoie $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même. De plus, la dérivation est linéaire, donc $\varphi(\lambda P + Q) = (X-1)(\lambda P' + Q') = \lambda \varphi(P) + \varphi(Q)$. **φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.**

b. On calcule les images des vecteurs de $\mathcal{B}$: $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = X - 1$ et $\varphi(X^2) = 2X(X-1) = 2X^2 - 2X$. En plaçant leurs coordonnées en colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c. Dans $\mathcal{B}$, on a $1 = (1, 0, 0)$, $X - 1 = (-1, 1, 0)$ et $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1 = (1, -2, 1)$. Réciproquement, $X = (X-1) + 1$ et $X^2 = (X-1)^2 + 2(X-1) + 1$. On obtient :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification : la première ligne de P fois les colonnes de P^{-1} donne 1, $1 - 1 = 0$ et $1 - 2 + 1 = 0$; la deuxième donne 0, 1 et $2 - 2 = 0$; la troisième donne 0, 0, 1.

On a bien $P P^{-1} = I_3$.

- d. On a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X-1) = (X-1) \times 1 = X-1$ et $\varphi((X-1)^2) = (X-1) \times 2(X-1) = 2(X-1)^2$. Donc

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifions la formule. Les colonnes de AP sont $A(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$,

$A(-1, 1, 0) = (-1, 1, 0)$ et $A(1, -2, 1) = (2, -4, 2)$. Ensuite P^{-1} envoie $(-1, 1, 0)$ sur $(-1 + 1, 1, 0) = (0, 1, 0)$ et $(2, -4, 2)$ sur $(2 - 4 + 2, -4 + 4, 2) = (0, 0, 2)$.

Donc $P^{-1} A P = A'$, qui est diagonale.

- e. Les colonnes non nulles $(-1, 1, 0)$ et $(0, -2, 2)$ de A ne sont pas colinéaires, donc $\text{rg } A = 2$; de plus $\text{tr } A = 0 + 1 + 2 = 3$, comme pour A' . Le théorème du rang donne $\dim \ker \varphi = 3 - 2 = 1$. Or $\varphi(1) = 0$. **Donc** $\ker \varphi = \mathbb{R}_0[X]$, l'ensemble des polynômes constants.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point ; c) 1,5 point : 0,5 pour P , 0,5 pour P^{-1} , 0,5 pour la vérification ; d) 1,5 point : 0,5 pour A' , 1 point pour le produit $P^{-1}AP$; e) 0,5 point.

Exercice 3 : Rang d'une matrice à paramètre (4 points)

- a. On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - a L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. Ces opérations ne changent pas le rang :

$$M_a \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}.$$

Le dernier coefficient se factorise : $2 - a - a^2 = -(a^2 + a - 2) = (1 - a)(a + 2)$.

b. On distingue trois cas.

Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, les trois coefficients diagonaux 1 , $a - 1$ et $(1 - a)(a + 2)$ sont non nuls : $\text{rg } M_a = 3$.

Si $a = 1$, toutes les lignes de M_1 valent $(1, 1, 1)$: $\text{rg } M_1 = 1$.

Si $a = -2$, la matrice réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0,0 \end{pmatrix}$, avec deux lignes non nulles échelonnées : $\text{rg } M_{-2} = 2$.

c. Les colonnes de M_{-2} sont $C_1 = (1, 1, -2)$, $C_2 = (1, -2, 1)$ et $C_3 = (-2, 1, 1)$. Leur somme est $(0, 0, 0)$. **Donc** $C_1 + C_2 + C_3 = 0$.

Erreur fréquente : diviser une ligne par $a - 1$ sans avoir traité à part le cas $a = 1$.

Barème : a) 2 points : 1 point pour les opérations, 0,5 pour la matrice triangulaire, 0,5 pour la factorisation ; b) 1,5 point : 0,5 par cas ; c) 0,5 point.

Exercice 4 : Matrices semblables ou non (3 points)

a. La première matrice a pour trace $1 + 2 = 3$, la seconde $1 + 1 = 2$. Or deux matrices semblables ont la même trace (exercice 1). **Elles ne sont donc pas semblables.**

b. Pour toute $P \in GL_2(\mathbb{R})$, $P^{-1} I_2 P = P^{-1} P = I_2$. La seule matrice semblable à I_2 est donc I_2 elle-même. **Comme** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2$, **les deux matrices ne sont pas semblables**, bien qu'elles aient même trace et même rang : ces invariants ne suffisent pas.

c. Prenons $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui vérifie $P^2 = I_2$, donc $P^{-1} = P$. On calcule $NP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1} N P = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = N'$. **Les matrices N et N' sont semblables.** Géométriquement, P échange les deux vecteurs de la base canonique.

Barème : a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point : 0,5 pour le choix de P et de P^{-1} , 0,5 pour le calcul.

Exercice 5 : Problème : matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ (5 points)

- a. Un vecteur $t w = (t, t, t)$ de G appartient à F si et seulement si $3t = 0$. Donc $F \cap G = \{0\}$. Soit maintenant $v = (x, y, z)$ et $s = \frac{x+y+z}{3}$. Le vecteur $v - s w$ a pour somme des coordonnées $(x+y+z) - 3s = 0$, donc il appartient à F . Ainsi $v = (v - s w) + s w \in F + G$. **Donc $F \oplus G = \mathbb{R}^3$: les sous-espaces F et G sont supplémentaires.**

- b. D'après a), la composante de v sur F parallèlement à G est $p(v) = v - s w$. On obtient

$$p(x, y, z) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right),$$

d'où

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- c. Les vecteurs f_1 et f_2 sont dans F , car la somme de leurs coordonnées est nulle. Ils sont libres : $a f_1 + b f_2 = (a, b - a, -b) = 0$ impose $a = b = 0$. Comme $\dim G = 1$ et $F \oplus G = \mathbb{R}^3$, on a $\dim F = 2$: (f_1, f_2) est une base de F . La concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. **Donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.** Enfin, $p(f_1) = f_1$, $p(f_2) = f_2$ et $p(w) = 0$. **La matrice de P dans $\mathcal{B}'$ est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.**

- d. Les matrices A et D sont semblables, donc elles ont le même rang et la même trace.

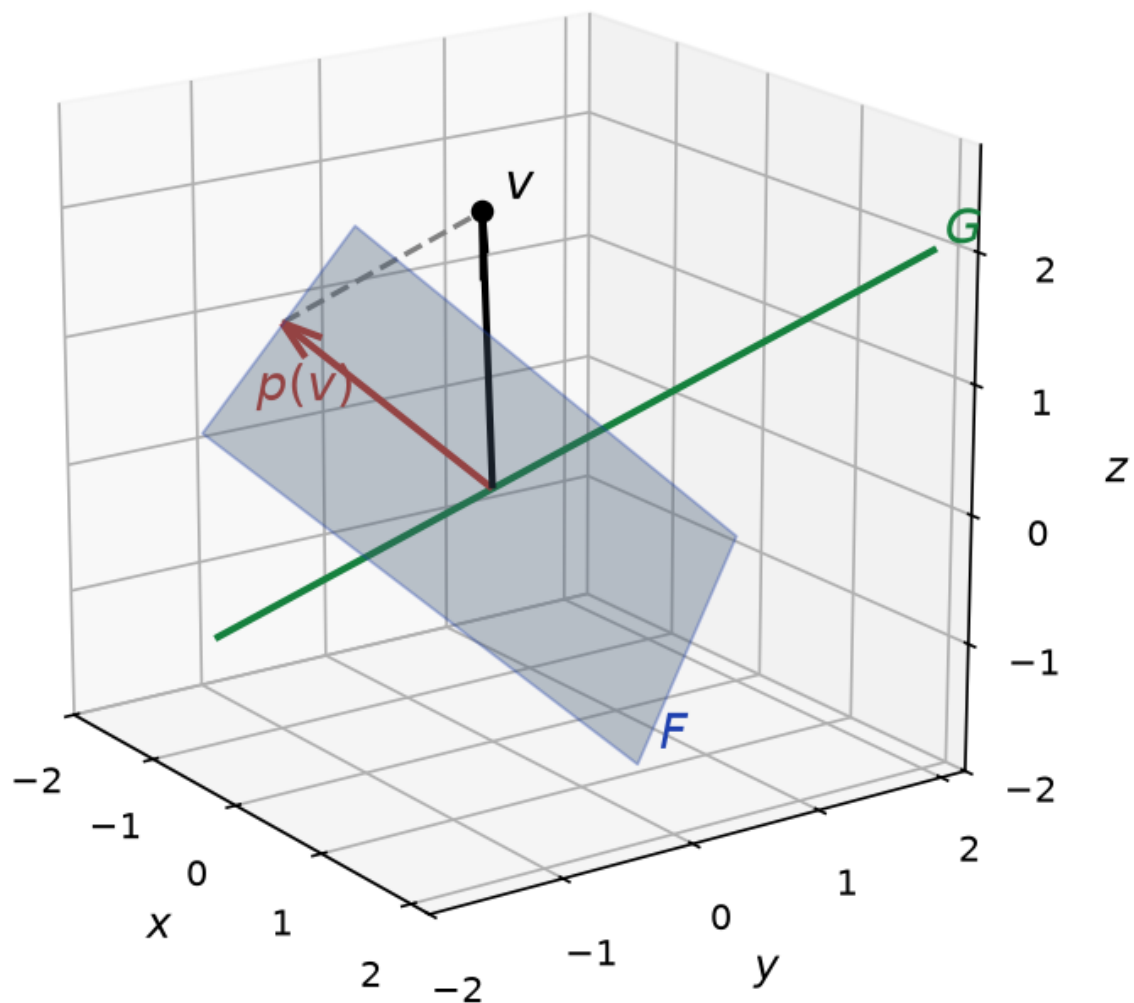
$\text{rg } A = 2$ et $\text{tr } A = 2$. Vérification directe : $\text{tr } A = \frac{2+2+2}{3} = 2$.

- e. La formule de changement de base donne $D = Q^{-1} A Q$, donc $A = Q D Q^{-1}$. Ainsi

$$A^2 = Q D Q^{-1} Q D Q^{-1} = Q D^2 Q^{-1}.$$

Or $D^2 = D$, car D est diagonale à coefficients 0 ou 1. **Donc**

$$A^2 = Q D Q^{-1} = A : \text{on retrouve que } p \circ p = p.$$



Barème : a) 1 point (0,5 pour l'intersection, 0,5 pour la somme) ; b) 1,5 point : 1 point pour $p(x, y, z)$, 0,5 pour A ; c) 1 point : 0,5 pour la base, 0,5 pour D ; d) 0,5 point ; e) 1 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : matrices, rang, trace et changement

de base

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Matrices et changement de base](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [matrices et changement de base](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).