

Corrigé du contrôle de maths L1 : logique, quantificateurs et ensembles

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : De Morgan et irrationalité de racine de 2	4 points
Exercice 2 : Quantificateurs et négations	5 points
Exercice 3 : Implication, contraposée et réciproque	4 points
Exercice 4 : Problème : analyse-synthèse et fonctions indicatrices	7 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : De Morgan et irrationalité de racine de 2 (4 points)

a. Les lois de De Morgan s'écrivent : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Montrons la première par double inclusion. Soit $x \in \overline{A \cup B}$. Alors $x \in E$ et $x \notin A \cup B$. Par conséquent, $x \notin A$ et $x \notin B$, car sinon x appartiendrait à la réunion. Ainsi $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$, donc $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Réciproquement, soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Alors $x \notin A$ et $x \notin B$; donc x n'appartient à

aucune des deux parties, c'est-à-dire $x \notin A \cup B$. Ainsi $x \in \overline{A \cup B}$.

Les deux inclusions donnent $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

- b. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Comme $\sqrt{2} > 0$, on peut l'écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et la fraction irréductible.

En élevant au carré, on obtient $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est pair, et d'après le rappel, p est pair : on écrit $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$. Ainsi q^2 est pair, donc q est pair.

Par conséquent, p et q sont tous deux divisibles par 2, ce qui contredit l'irréductibilité de la fraction. **L'hypothèse est donc fautive : $\sqrt{2}$ est irrationnel.**

Barème : a) 0,5 point pour les deux énoncés, 1,5 point pour la double inclusion (0,75 par inclusion) ; b) 0,5 point pour l'hypothèse de l'absurde avec fraction irréductible, 1 point pour la parité de p puis de q , 0,5 point pour la contradiction clairement énoncée.

Exercice 2 : Quantificateurs et négations (5 points)

- a. « f est majorée » s'écrit $\exists M \in \mathbb{R},$
 $\forall x \in \mathbb{R},$
 $f(x) \leq M$.

Négation : $\forall M \in \mathbb{R},$
 $\exists x \in \mathbb{R},$
 $f(x) > M$.

- b. On échange les quantificateurs et on nie l'implication : la négation de $R \Rightarrow S$ est « R et non S ». **La fonction f n'est pas continue en a lorsque**

$$\begin{aligned} & \exists \varepsilon > 0, \\ & , \forall \eta > 0, \\ & , \exists x \in \mathbb{R}, \\ & , |x - a| \leq \eta \\ & , \text{et} \\ & , |f(x) - f(a)| > \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour g en 0 , on a $g(0) = 1$. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $\eta > 0$ quelconque ; posons $x = -\eta$. Alors $|x - 0| = \eta \leq \eta$, et comme $x < 0$, $g(x) = 0$, donc $|g(x) - g(0)| = 1 > \frac{1}{2}$. **La négation est vérifiée : g n'est pas continue en 0 .**

- c. La phrase s'écrit
$$\begin{aligned} & \forall A \in \mathbb{R}, \\ & , \exists B \in \mathbb{R}, \\ & , \forall x \in \mathbb{R}, \\ & , (x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A) \end{aligned}$$
.

Négation :

$$\begin{aligned} & \exists A \in \mathbb{R}, \\ & , \forall B \in \mathbb{R}, \\ & , \exists x \in \mathbb{R}, \\ & , x \geq B \\ & , \text{et} \\ & , f(x) < A \end{aligned}$$

- d. P_1 est vraie. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$; le réel $y = x^2 + 1$ vérifie $y > x^2$. Ici y dépend de x , ce que permet l'ordre des quantificateurs.

$\forall y \in \mathbb{R},$

P_2 est fausse. Montrons sa négation : $\exists x \in \mathbb{R},$. Soit y un réel ; posons $x = \sqrt{|y|}$.
 $y \leq x^2$

Alors $x^2 = |y| \geq y$. Autrement dit, aucun réel ne majore strictement tous les carrés.

P_1 est vraie et P_2 est fausse : l'ordre des quantificateurs change le sens.

Erreur fréquente : nier « $|x-a| \leq \eta \Rightarrow \dots$ » par une autre implication. La négation d'une implication est une conjonction.

Barème : a) 0,5 point pour la phrase, 0,5 point pour la négation ; b) 0,75 point pour la négation, 0,75 point pour le choix de epsilon et de x ; c) 0,5 point + 0,5 point ; d) 0,75 point par phrase, dont 0,25 point pour le bon verdict et 0,5 point pour la justification.

Exercice 3 : Implication, contraposée et réciproque (4 points)

a. On note V pour vrai et F pour faux.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	non Q	non P	$(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Les deux colonnes finales coïncident. **Une implication et sa contraposée sont donc logiquement équivalentes.**

- b. Contraposée : « si n est impair, alors n^2 est impair ». Réciproque : « si n est pair, alors n^2 est pair ».

Démontrons la contraposée. Soit n impair : $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors
 $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, donc n^2 est impair. La contraposée étant vraie, l'implication l'est aussi.

La réciproque est vraie : si $n = 2k$, alors $n^2 = 2(2k^2)$ est pair. **Ainsi, n^2 est pair si et seulement si n est pair.**

- c. La contraposée s'écrit : si $x \neq 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x| > \varepsilon$.

Supposons $x \neq 0$. Alors $|x| > 0$; posons $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$. On a bien $\varepsilon > 0$, et
 $|x| - \varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$, donc $|x| > \varepsilon$.

La contraposée est démontrée, donc si $|x| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors $x = 0$.

Barème : a) 0,5 point pour la table, 0,5 point pour la conclusion ; b) 0,5 point pour la contraposée et la réciproque, 0,5 point pour la démonstration, 0,5 point pour la réciproque justifiée ; c) 0,5 point pour la contraposée correctement écrite, 1 point pour le choix de epsilon et la vérification.

Exercice 4 : Problème : analyse-synthèse et fonctions indicatrices (7 points)

Partie A : décomposition paire et impaire

- a. Analyse. Supposons $f = g + h$ avec g paire et h impaire. Pour tout réel x , on a $f(x) = g(x) + h(x)$. De plus, $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$.

En additionnant puis en soustrayant ces deux égalités, on obtient

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Ainsi g et h sont entièrement déterminées par f : si la décomposition existe, elle est unique.

- b. Synthèse. Définissons g et h par les formules précédentes. Pour tout réel x , on a $g(x) + h(x) = f(x)$. Ensuite, $g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$, donc g est paire. Enfin, $h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$, donc h est impaire.

La décomposition existe, et elle est unique d'après l'analyse.

- c. Pour $f = \exp$, on trouve $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$ et $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$.
Donc $\exp = \operatorname{ch} + \operatorname{sh}$.

Partie B : calculs avec les indicatrices

- d. Soit $x \in E$. Si $x \in A \cap B$, alors $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$, donc le produit vaut $1 = \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$. Sinon, $x \notin A$ ou $x \notin B$: l'un des deux facteurs est nul, donc le produit vaut $0 = \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$.

De même, si $x \in A$, alors $1 - \mathbb{1}_A(x) = 0 = \mathbb{1}_{\overline{A}}(x)$; si $x \notin A$, alors $1 - \mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_{\overline{A}}(x)$. **Donc $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.**

e. D'après la loi de De Morgan, $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$. Par conséquent, avec la question précédente :

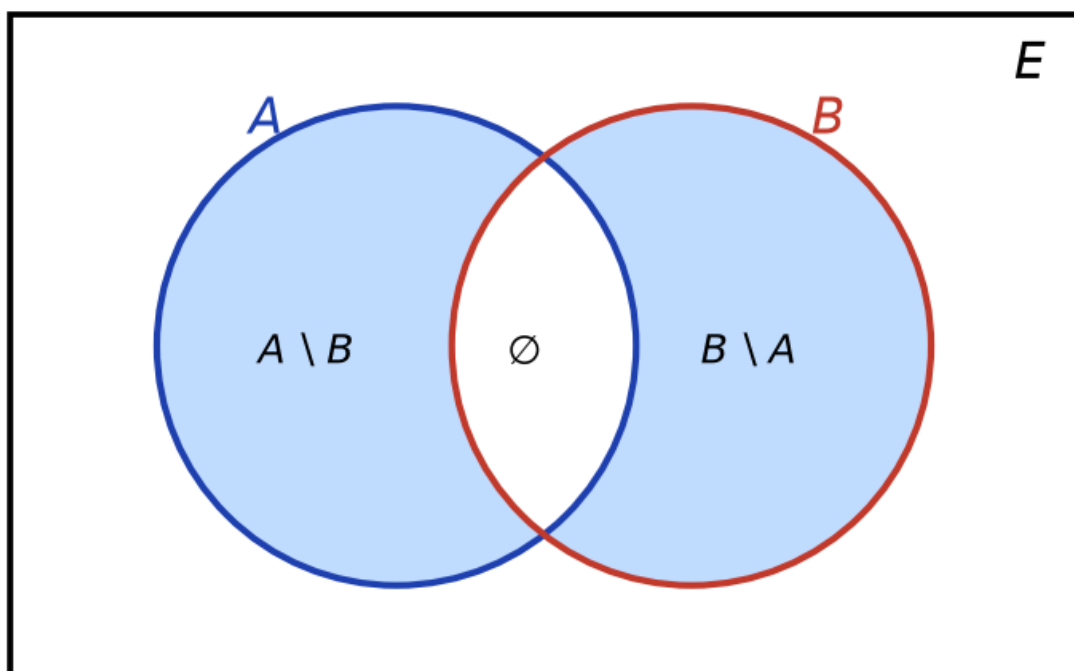
$$\mathbb{1}_{A \cup B} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}} \mathbb{1}_{\overline{B}} = 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B).$$

En développant, $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

f. D'abord, $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, donc $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A (1 - \mathbb{1}_B)$. De même, $\mathbb{1}_{B \setminus A} = \mathbb{1}_B (1 - \mathbb{1}_A)$. Ces deux parties sont disjointes, donc le produit de leurs indicatrices est nul, et la formule de la question e) donne la somme :

$$\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$

Or une indicatrice ne prend que les valeurs 0 et 1, donc $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B^2 = \mathbb{1}_B$. Ainsi $(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2 = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \Delta B}$.



Enfin, $A \Delta B = \emptyset$ équivaut à $1_A \Delta B = 0$, soit $(1_A - 1_B)^2 = 0$, c'est-à-dire $1_A = 1_B$. **D'après le résultat admis, $A \Delta B = \emptyset$ si et seulement si $A = B$.**

Barème : a) 1,5 point pour les deux expressions, 0,5 point pour la conclusion sur l'unicité ; b) 0,5 point pour la somme, 1 point pour la parité et l'imparité ; c) 0,5 point ; d) 0,5 point par égalité ; e) 0,5 point pour l'usage de De Morgan, 0,5 point pour le calcul ; f) 0,5 point pour la formule, 0,5 point pour l'équivalence.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : logique, quantificateurs et ensembles

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Logique et ensembles » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [logique et ensembles](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).