

Corrigé du contrôle de maths L1 : limites de fonctions et continuité

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Théorème des valeurs intermédiaires	4 points
Exercice 2 : Limites, epsilon-delta et suites	5 points
Exercice 3 : Une fonction définie avec la partie entière	4,5 points
Exercice 4 : Points fixes, extremums et cordes horizontales	6,5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Théorème des valeurs intermédiaires (4 points)

- a. **Théorème des valeurs intermédiaires** : si f est continue sur $[a, b]$, alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.
- b. Cas $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. L'ensemble $E = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$ contient a et il est majoré par b . D'après l'axiome de la borne supérieure, il admet une borne supérieure $c \in [a, b]$.

On a $f(c) \leq 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure, pour tout $n \geq 1$ il existe $x_n \in E$ tel que $c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$. Ainsi x_n tend vers c et $f(x_n) \leq 0$. Comme f est continue en c , $f(x_n)$ tend vers $f(c)$ (caractérisation séquentielle), donc $f(c) \leq 0$ par passage à la limite.

On a $f(c) \geq 0$. Si $c = b$, alors $f(c) = f(b) \geq 0$. Si $c < b$, tout $x \in]c, b]$ n'appartient pas à E (il dépasse la borne supérieure), donc $f(x) > 0$. La suite $y_n = c + \frac{b-c}{n}$ est dans $]c, b]$ et tend vers c , donc $f(c) = \lim f(y_n) \geq 0$.

Ainsi $f(c) = 0$.

Cas général. Soit y entre $f(a)$ et $f(b)$. Si $f(a) \leq y \leq f(b)$, la fonction $f - y$ est continue et vérifie $(f-y)(a) \leq 0 \leq (f-y)(b)$: elle s'annule en un point c . Si $f(b) \leq y \leq f(a)$, on applique le premier cas à $y - f$. **Dans tous les cas, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.**

Barème : a) 1 point ; b) 3 points : 0,5 point pour l'existence de c , 1 point pour $f(c) \leq 0$, 1 point pour $f(c) \geq 0$ avec le cas $c = b$, 0,5 point pour le cas général.

Exercice 2 : Limites, epsilon-delta et suites (5 points)

a. Pour tout réel x , $|x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2|$. Si $|x - 2| \leq 1$, alors $1 \leq x \leq 3$, donc $|x + 2| \leq 5$.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right) > 0$. Pour tout x tel que $|x - 2| < \delta$, on a $|x^2 - 4| \leq 5|x - 2| < 5 \times \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$. **Donc $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.**

b. On pose $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ pour $n \geq 1$. Ces deux suites de réels non nuls tendent vers 0. Or $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin(2n\pi) = 0$ et $\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$.

Si la fonction admettait une limite L en 0, la caractérisation séquentielle donnerait $L = 0$ et $L = 1$. **C'est impossible : $x \rightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.**

c. Pour tout $x \neq 0$, $|g(x)| \leq |x|$ car $|\sin| \leq 1$. Par le théorème des gendarmes, $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. **La fonction g se prolonge par continuité en 0 en**

posant $g(0) = 0$.

d. En 0. Pour tout x , $|h(x) - h(0)| = |h(x)| \leq |x|$, donc $h(x)$ tend vers $h(0) = 0$: h est continue en 0.

En $a \neq 0$. Par densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (r_n) de rationnels et une suite (s_n) d'irrationnels qui tendent vers a . Alors $h(r_n) = r_n$ tend vers a et $h(s_n) = 0$ tend vers $0 \neq a$. Par la caractérisation séquentielle, h n'a pas de limite en a .

La fonction h est continue en 0 et en aucun autre point.

Erreur fréquente : prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ sans avoir d'abord imposé $|x - 2| \leq 1$, ce qui laisse $|x + 2|$ non majoré.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la factorisation et la majoration de $|x + 2|$, 1 point pour δ et la conclusion ; b) 1,5 point : 1 point pour les deux suites, 0,5 point pour la conclusion séquentielle ; c) 1 point ; d) 1 point : 0,5 point en 0, 0,5 point en $a \neq 0$.

Exercice 3 : Une fonction définie avec la partie entière (4,5 points)

a. Pour $x \in [n, n+1[$, on a $\lfloor x \rfloor = n$, donc $f(x) = n + (x - n)^2$. Sur $]n, n+1[$, f coïncide avec une fonction polynôme, donc elle y est continue.

b. On a $f(n) = n + 0 = n$.

À droite. Pour $x \in [n, n+1[$, $f(x) = n + (x - n)^2$ tend vers n quand x tend vers n par valeurs supérieures.

À gauche. Pour $x \in [n-1, n[$, $\lfloor x \rfloor = n - 1$, donc $f(x) = n - 1 + (x - n + 1)^2$, qui tend vers $n - 1 + 1 = n$ quand x tend vers n par valeurs inférieures.

Les limites à gauche et à droite en n sont égales à $f(n)$, donc f est continue en n . Avec la

question a), f **est continue sur** $\mathbb{R}$, malgré la présence de la partie entière.

c. Pour $x \geq -1$, $x \neq 0$, on multiplie par la quantité conjuguée :

$$\varphi(x) = \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}.$$

La fonction $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}$ est continue en 0 (racine carrée continue, dénominateur non nul), donc $\varphi(x)$ tend vers $\frac{1}{2}$. **La fonction φ se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \frac{1}{2}$.**

d. Sur chaque segment $[n, n+1]$, on a $f(x) = n + (x - n)^2$, y compris en $x = n+1$ où les deux expressions valent $n+1$. Cette fonction est strictement croissante sur $[n, n+1]$ car $x - n \geq 0$ y croît strictement. Soit $x < y$. S'ils sont dans le même segment, $f(x) < f(y)$. Sinon, on intercale les entiers $m_1 < \dots < m_p$ situés entre eux et on enchaîne les inégalités : $f(x) < f(m_1) < \dots < f(m_p) \leq f(y)$, l'une au moins étant stricte. Donc **f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

De plus $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq f(x) < \lfloor x \rfloor + 1 \leq x + 1$, donc f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$. D'après le théorème de la bijection continue, **f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.**

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 0,5 point par limite latérale, 0,5 point pour la conclusion ; c) 1,5 point : 1 point pour la quantité conjuguée, 0,5 point pour la valeur $\frac{1}{2}$; d) 1 point : 0,5 point pour la stricte croissance, 0,5 point pour les limites et le théorème cité.

Exercice 4 : Points fixes, extremums et cordes horizontales (6,5 points)

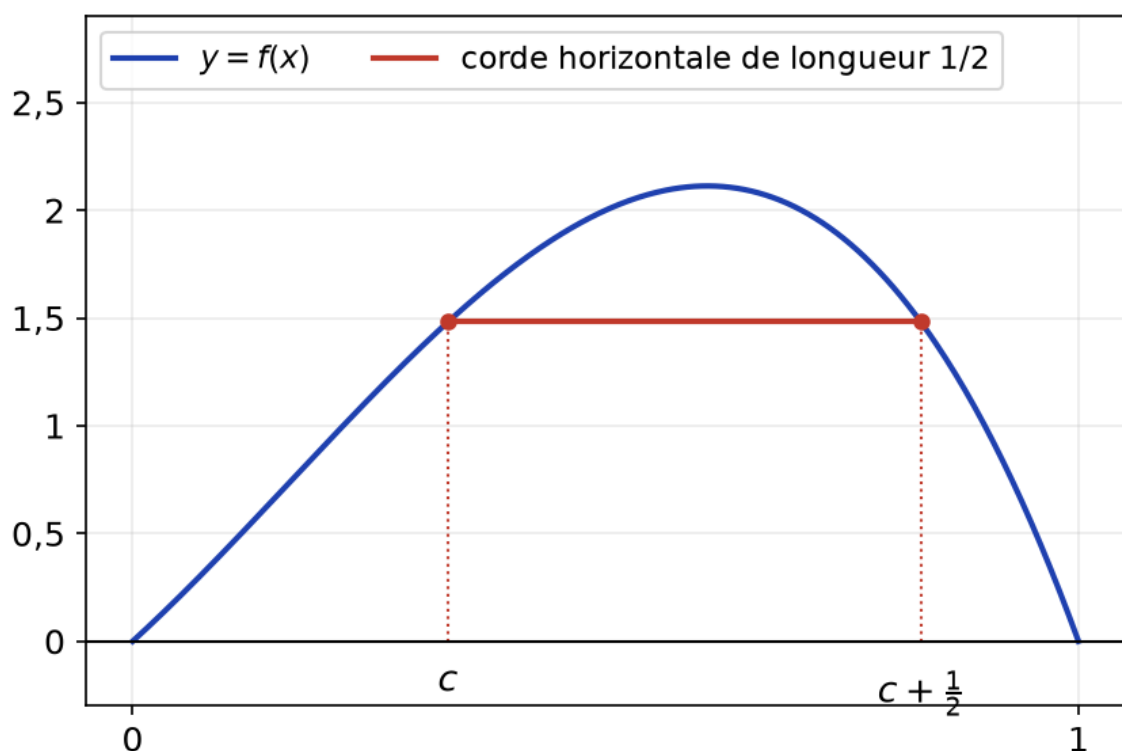
a. On pose $g(x) = f(x) - x$, continue sur $[0,1]$ comme différence de fonctions continues. Comme f est à valeurs dans $[0,1]$, $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Par le

théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule en un point $c \in [0,1]$. **Il existe** $c \in [0,1]$ **tel que** $f(c) = c$.

- b. Par définition des limites infinies, il existe $A > 0$ tel que $f(x) > f(0)$ pour tout x vérifiant $|x| > A$. La fonction f est continue sur le segment $[-A, A]$: d'après le théorème des bornes atteintes, elle y admet un minimum $m = f(x_0)$ avec $x_0 \in [-A, A]$. Comme $0 \in [-A, A]$, on a $m \leq f(0)$.

Pour $|x| > A$, $f(x) > f(0) \geq m$. Pour $|x| \leq A$, $f(x) \geq m$. **Donc** $f(x_0)$ **est le minimum de** f **sur** $\mathbb{R}$.

- c. La fonction g est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$. On a $g(0) = f(\frac{1}{2}) - f(0)$ et $g(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) = f(0) - f(\frac{1}{2})$. Donc $g(\frac{1}{2}) = -g(0)$: les deux valeurs sont de signes opposés (ou nulles). Par le théorème des valeurs intermédiaires, **il existe** $c \in [0, \frac{1}{2}]$ **tel que** $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$.



- d. La fonction g_n est continue sur $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ et les points $\frac{k}{n}$, pour $0 \leq k \leq n-1$, appartiennent à cet intervalle. La somme est télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = f(1) - f(0) = 0.$$

Supposons par l'absurde que g_n ne s'annule pas. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, une fonction continue qui ne s'annule pas sur un intervalle y garde un signe constant. Tous les termes de la somme seraient alors strictement de même signe, et la somme serait non nulle : c'est absurde. **Il existe donc** $c \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ **tel que** $f\left(c + \frac{1}{n}\right) = f(c)$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la fonction auxiliaire, 0,5 point pour les signes, 0,5 point pour le théorème cité ; b) 2 points : 0,5 point pour le choix de A , 1 point pour le théorème des bornes atteintes sur $[-A, A]$, 0,5 point pour la comparaison hors du segment ; c) 1,5 point : 1 point pour $g\left(\frac{1}{2}\right) = -g(0)$, 0,5 point pour la conclusion ; d) 1,5 point : 0,5 point pour la somme télescopique, 1 point pour l'argument de signe constant.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : limites de fonctions et continuité

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Limites et continuité](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [limites et continuité](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : suites, continuité et dérivation](#)