Corrigé du contrôle de maths L1 : intégrales, équations différentielles et DL

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Une fonction définie par une intégrale	6 points
Exercice 2 : Équation différentielle et intégration par parties	6 points
Exercice 3 : Problème : une suite d'intégrales issue d'une équation différentielle	8 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Une fonction définie par une intégrale (6 points)

a.

La fonction $f : t \to e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $G : x \to \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est donc une primitive de f. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $G' = f$.

Ensuite, la relation de Chasles donne $F(x) = G(2x) - G(x)$ pour tout réel x. Par composition et différence, F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus :

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}.$$

Ainsi F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.

b.

Soit x réel. Dans $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{-t^2}\,dt$, on effectue le changement de variable $t = -u$, qui est de classe C^1. Alors $dt = -du$, et u va de x à $2x$. Donc :

$$F(-x) = \int_{x}^{2x} e^{-u^2}\,(-du) = -F(x).$$

La fonction F est donc impaire.

c.

D'abord, le DL usuel de l'exponentielle donne $e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} + o(t^4)$ en 0. Or G est une primitive de f avec $G(0) = 0$. Par le théorème d'intégration des développements limités :

$$G(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5).$$

Ensuite, on remplace x par $2x$, qui tend vers 0 : $G(2x) = 2x - \frac{8x^3}{3} + \frac{32x^5}{10} + o(x^5)$. Par différence :

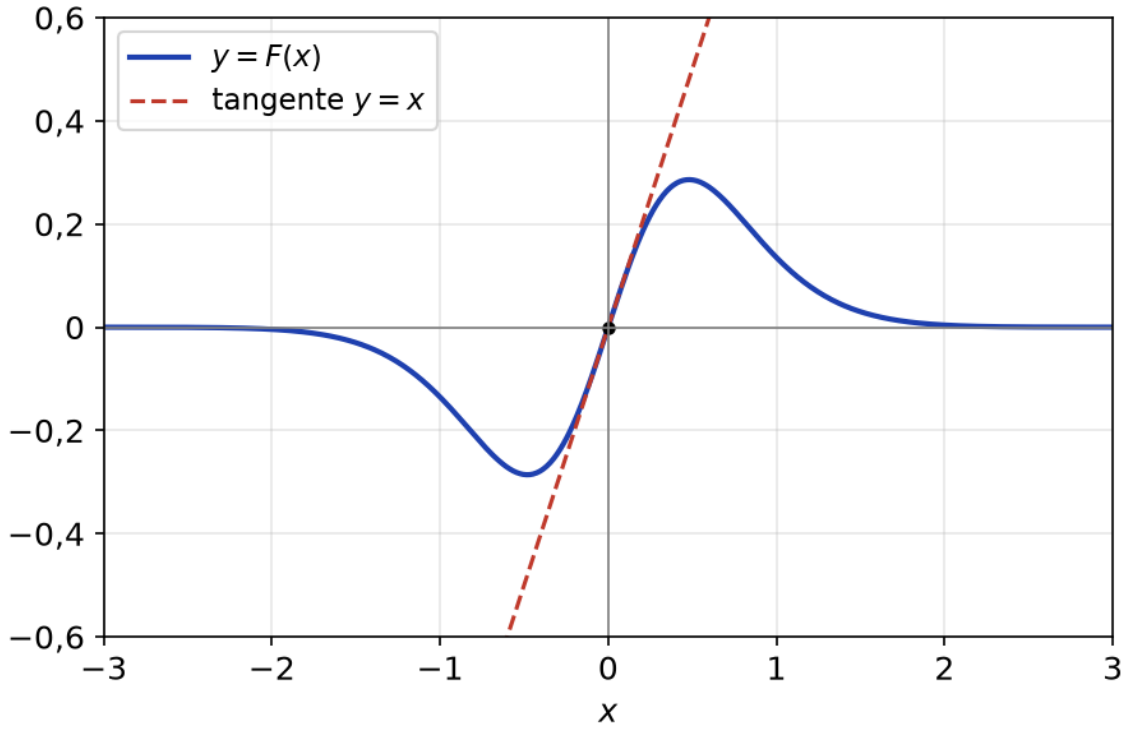
$$F(x) = x - \frac{7}{3}x^3 + \frac{31}{10}x^5 + o(x^5).$$

Le DL de F à l'ordre 5 en 0 est $F(x) = x - \frac{7}{3}x^3 + \frac{31}{10}x^5 + o(x^5)$. On remarque qu'il ne contient que des puissances impaires, ce qui est cohérent avec la question b.

d.

Le DL à l'ordre 1 donne $F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$. **La tangente en 0 a pour équation $y = x$.** On retrouve d'ailleurs $F'(0) = 2 - 1 = 1$.

Ensuite, $F(x) - x = -\frac{7}{3}x^3 + o(x^3)$, donc $F(x) - x \sim -\frac{7}{3}x^3$. Au voisinage de 0, $F(x) - x$ est donc du signe de $-x^3$. **La courbe est au-dessous de sa tangente à droite de 0 et au-dessus à gauche : l'origine est un point d'inflexion.**



e.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Soit $x > 0$. Alors $x < 2x$ et, pour tout $t \in [x, 2x]$, $t^2 \geq x^2$. Par décroissance de $u \to e^{-u}$, on a donc $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$. Par positivité de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant) :

$$0 \leq F(x) \leq (2x - x)\, e^{-x^2} = x\, e^{-x^2}.$$

Or $x\, e^{-x^2}$ tend vers 0 en $+\infty$, par croissances comparées. **D'après le théorème d'encadrement,** $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$**.**

Erreur fréquente : dériver F en $e^{-4x^2} - e^{-x^2}$, en oubliant le facteur 2 de la dérivée de $x \to 2x$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour l'existence de G, 0,5 point pour la régularité, 0,5 point pour F' ; b) 1 point ; c) 1,5 point : 0,5 point pour le DL de G justifié, 1 point pour le DL de F ; d) 1 point : 0,5 point pour la tangente, 0,5 point pour la position ; e) 1 point : 0,5 point pour l'encadrement, 0,5 point pour la limite.

Exercice 2 : Équation différentielle et intégration par parties (6 points)

a.

Sur I, $x \neq 0$, donc l'équation homogène équivaut à $y' - \frac{1}{x}\, y = 0$. La fonction $x \to -\frac{1}{x}$ est continue sur I, de primitive $-\ln x$. **Les solutions homogènes sont donc les fonctions** $x \to \lambda\, e^{\ln x} = \lambda\, x$**, avec** $\lambda \in \mathbb{R}$**.**

b.

On pose $u(t) = \ln t$ et $v(t) = t$. Ces fonctions sont de classe C^1 sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$). Par intégration par parties :

$$\int_1^x \ln t \, dt = \left[t \ln t\right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} \, dt = x \ln x - (x - 1).$$

Ainsi $\int_1^x \ln t \, dt = x \ln x - x + 1$ **.**

c.

On cherche les solutions sous la forme $y(x) = \lambda(x)\, x$, avec λ dérivable sur I. Alors $y'(x) = \lambda'(x)\, x + \lambda(x)$, donc :

$$x\, y'(x) - y(x) = \lambda'(x)\, x^2 + \lambda(x)\, x - \lambda(x)\, x = \lambda'(x)\, x^2.$$

Par conséquent, y est solution de (E) si et seulement si $\lambda'(x) = \ln x$ sur I. D'après la question b, cela équivaut à $\lambda(x) = x \ln x - x + C$, avec C réel.

Les solutions de (E) **sur** I **sont les fonctions** $x \to x^2 \ln x - x^2 + C\, x$ **, avec** $C \in \mathbb{R}$ **.**

d.

On a $g(1) = 0 - 1 + C = 0$, donc $C = 1$. L'unicité découle du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire sur I. **Ainsi** $g(x) = x^2 \ln x - x^2 + x$ **.**

e.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

La fonction g est de classe C^3 sur I. On calcule ses dérivées :

$g'(x) = 2x\ln x + x - 2x + 1 = 2x\ln x - x + 1$, donc $g'(1) = 0$;

$g''(x) = 2\ln x + 2 - 1 = 2\ln x + 1$, donc $g''(1) = 1$;

$g'''(x) = \frac{2}{x}$, donc $g'''(1) = 2$.

D'après la formule de Taylor-Young, avec $x = 1 + h$:

$$g(1+h) = 0 + 0 \times h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{2}{6}h^3 + o(h^3).$$

Donc $g(1+h) = \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$**.**

Vérification par produit : $x^2 = 1 + 2h + h^2$ et $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$. Donc $x^2\ln x = h + \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)$. De plus, $-x^2 + x = -h - h^2$. La somme donne bien $\frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$.

Ainsi $g(1+h) \sim \frac{h^2}{2}$, qui est positif pour $h \neq 0$. **La fonction g admet en 1 un minimum local strict, égal à 0, avec une tangente horizontale.** On retrouve $g'(1) = 0$ directement dans l'équation : $1 \times g'(1) - g(1) = 0$.

Barème : a) 1 point ; b) 1 point : 0,5 point pour le choix de u et v, 0,5 point pour le résultat ; c) 1,5 point : 0,5 point pour la forme cherchée, 0,5 point pour λ', 0,5 point pour la conclusion ; d) 0,5 point ; e) 2 points : 1 point pour le DL, 0,5 point pour la justification (Taylor-Young ou produit), 0,5 point pour

l'interprétation.

Exercice 3 : Problème : une suite d'intégrales issue d'une équation différentielle (8 points)

Partie A : l'équation différentielle

a.

L'équation (E_n) est linéaire du premier ordre, à coefficients continus sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, elle admet une unique solution y_n telle que $y_n(0) = 0$.

Les solutions homogènes sont les $x \to \lambda\, e^{-x}$. On pose donc $y(x) = \lambda(x)\, e^{-x}$. Alors $y' + y = \lambda'(x)\, e^{-x}$. Ainsi y est solution si et seulement si $\lambda'(x) = x^n\, e^x$.

La fonction $t \to t^n\, e^t$ est continue. Par le théorème fondamental de l'analyse, $\lambda(x) = \displaystyle\int_0^x t^n\, e^t\, dt + K$. La condition $y(0) = 0$ impose $K = 0$. **Donc** $y_n(x) = e^{-x} \displaystyle\int_0^x t^n\, e^t\, dt$.

b.

On intègre par parties avec $u(t) = t$ et $v(t) = e^t$, de classe C^1 :

$$\int_0^x t\, e^t\, dt = \left[t\, e^t\right]_0^x - \int_0^x e^t\, dt = x\, e^x - e^x + 1.$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Donc $y_1(x) = x - 1 + e^{-x}$**.** Vérification : $y_1'(x) = 1 - e^{-x}$, donc $y_1'(x) + y_1(x) = x$. De plus, $y_1(0) = 0 - 1 + 1 = 0$.

c.

En 0, $t^n e^t = t^n + o(t^n)$. La fonction $\Phi : x \to \int_0^x t^n e^t \, dt$ est la primitive de $t \to t^n e^t$ nulle en 0. Par intégration des développements limités, $\Phi(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$.

Ensuite, e^{-x} tend vers 1 en 0. Donc $y_n(x) = e^{-x}\Phi(x) \sim \Phi(x)$. **Ainsi** $y_n(x) \sim \frac{x^{n+1}}{n+1}$ **quand** x **tend vers 0.** Pour $n = 1$, on retrouve $x - 1 + e^{-x} = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Partie B : la suite des valeurs en 1

d.

D'abord, $J_n = e^{-1}\int_0^1 t^n e^t \, dt = \int_0^1 t^n e^{t-1} \, dt$, par linéarité.

Ensuite, pour $t \in [0,1]$, on a $t - 1 \leq 0$, donc $0 \leq e^{t-1} \leq 1$. Ainsi $0 \leq t^n e^{t-1} \leq t^n$. Par positivité de l'intégrale :

$$0 \leq J_n \leq \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1}.$$

D'après le théorème d'encadrement, (J_n) converge vers 0.

e.

On intègre J_{n+1} par parties avec $u(t) = t^{n+1}$ et $v(t) = e^{t-1}$, de classe C^1 sur $[0,1]$:

$$J_{n+1} = \left[t^{n+1}e^{t-1}\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 t^n\, e^{t-1}\, dt = 1 - (n+1)\, J_n.$$

Donc $(n+1)\, J_n + J_{n+1} = 1$ pour tout entier naturel n.

f.

D'après la question e, $(n+1)\, J_n = 1 - J_{n+1}$. Or J_{n+1} tend vers 0 d'après la question d. Donc $(n+1)\, J_n$ tend vers 1.

Ensuite, $n\, J_n = \frac{n}{n+1} \times (n+1)\, J_n$, et $\frac{n}{n+1}$ tend vers 1. Par produit, $n\, J_n$ tend vers 1. **Ainsi $J_n \sim \frac{1}{n}$.**

g.

D'après la question f appliquée au rang $n+1$, $J_{n+1} \sim \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$. Donc $J_{n+1} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ensuite, avec le DL de $\frac{1}{1+h}$ en 0 pour $h = \frac{1}{n}$:

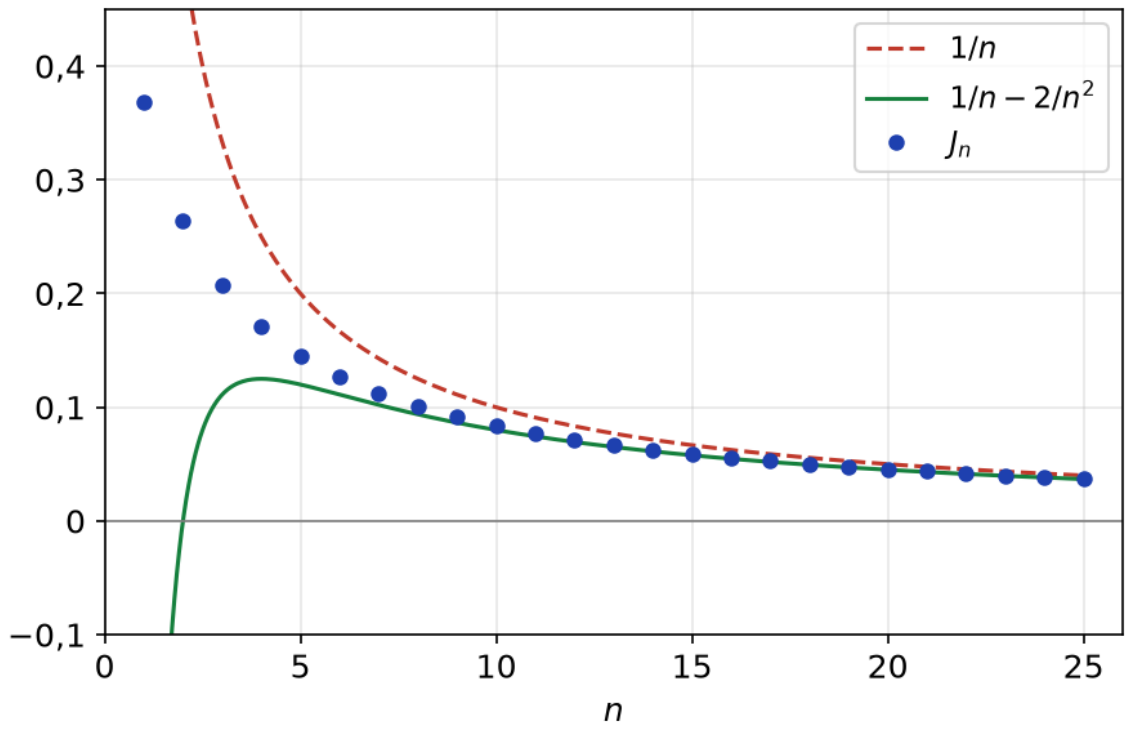
Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Enfin, la relation de la question e donne $J_n = \frac{1 - J_{n+1}}{n+1}$. Par produit :

$$J_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Ainsi $J_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$**.** Par exemple, pour $n = 200$, on trouve numériquement $J_{200} \approx 0{,}004951$, contre $\frac{1}{200} - \frac{2}{40\,000} = 0{,}00495$.



Erreur fréquente : écrire $J_n \sim \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}$. Un équivalent ne garde qu'un terme : il faut un petit o pour écrire un développement asymptotique.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour l'existence et l'unicité, 1 point pour la variation de la constante ; b) 1 point : 0,5 point pour l'intégration par parties, 0,5 point pour y_1 *et la vérification ; c) 1 point ; d) 1 point : 0,5 point pour l'encadrement, 0,5 point pour la limite ; e) 1 point ; f) 1 point ; g) 1,5 point : 0,5 point pour* J_{n+1}*, 0,5 point pour le DL de* $\frac{1}{n+1}$*, 0,5 point pour le produit.*

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : intégrales, équations différentielles et DL

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Intégration sur un segment » en L1 et « Équations différentielles » en L1 et « Développements limités » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** intégration sur un segment, équations différentielles, développements limités.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L1** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- Contrôle de maths L1 : intégrale de Riemann, primitives et IPP
- Contrôle de maths L1 : équations différentielles d'ordre 1 et 2
- Contrôle de maths L1 : formules de Taylor et développements limités

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.