

Corrigé du contrôle de maths L1 : intégrale de Riemann, primitives et IPP

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : positivité et inégalité de la moyenne	3 points
Exercice 2 : Sommes de Riemann	4 points
Exercice 3 : Intégration par parties et changement de variable	5 points
Exercice 4 : Problème : les intégrales de Wallis	8 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : positivité et inégalité de la moyenne (3 points)

- a. **Inégalité de la moyenne.** Si m et M sont des réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$m (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M (b - a).$$

En particulier $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f|.$

- b. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Posons $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. Par continuité de f en x_0 , il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon = \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$ vérifiant $|x - x_0| \leq \delta$. L'ensemble de ces x est un segment $[c, d]$ contenant x_0 , avec $c < d$ puisque $a < b$.

Par la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale (car $f \geq 0$), puis par l'inégalité de la moyenne :

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_c^d f(x) dx \geq \varepsilon (d - c) > 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse. **Donc f est nulle sur $[a, b]$.**

Barème : a) 1 point ; b) 2 points (0,5 pour le raisonnement par l'absurde, 0,75 pour l'usage de la continuité, 0,75 pour la minoration par Chasles et positivité).

Exercice 2 : Sommes de Riemann (4 points)

- a. Pour $1 \leq k \leq n$, $\frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + (k/n)^2} = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Ainsi S_n est la somme de Riemann de f sur $[0, 1]$ associée à la subdivision régulière de pas $\frac{1}{n}$, avec les extrémités droites. La fonction f est continue sur $[0, 1]$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

La suite (S_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$.

- b. La fonction f est décroissante sur $[0, 1]$. Pour $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, on a donc $f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k-1}{n}\right)$. En intégrant sur cet intervalle de longueur $\frac{1}{n}$, puis en sommant pour k de 1 à n (relation de Chasles) :

$$S_n \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = S_n + \frac{f(0) - f(1)}{n}.$$

Comme $f(0) - f(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, **on obtient** $S_n \leq \frac{\pi}{4} \leq S_n + \frac{1}{2n}$. Sur la figure, les rectangles sont bien sous la courbe.

- c. De même, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + k/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $g(x) = \frac{1}{1+x}$, continue sur $[0, 1]$.
Par le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

La suite (u_n) converge vers $\ln 2$.

Erreur fréquente : oublier de factoriser par n^2 au dénominateur, ou oublier de citer la continuité de la fonction sur $[0, 1]$.

Barème : a) 1,5 point (0,75 pour l'écriture en somme de Riemann, 0,75 pour la limite) ; b) 1 point ; c) 1,5 point (0,75 pour la reconnaissance, 0,75 pour la limite).

Exercice 3 : Intégration par parties et changement de variable (5 points)

- a. On intègre par parties avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$, de classe C^1 sur $[0, 1]$:

$$I = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1.$$

$$I = 1.$$

- b. On intègre par parties avec $u(x) = \ln x$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$, de classe C^1 sur $[1, e]$, et $u'(x) = \frac{1}{x}$:

$$J = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

$$J = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

- c. La fonction $\varphi : t \rightarrow t^2$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$, avec $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi'(t) = 2t$. La fonction $x \rightarrow \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$ est continue sur $[0, 1]$, et $\sqrt{t^2} = t$ pour $t \geq 0$.
Le théorème de changement de variable donne

$$K = \int_0^1 \frac{2t}{1+t} dt = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = 2[t - \ln(1+t)]_0^1.$$

$K = 2 - 2\ln 2$ (environ 0,61, valeur cohérente puisque l'intégrande est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1).

- d. On a $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. On cherche $\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+2}$. En multipliant par $x+1$ puis en prenant $x = -1$: $\alpha = \frac{2}{1} = 2$. En multipliant par $x+2$

puis en prenant $x = -2$: $\beta = \frac{1}{-1} = -1$. Donc

$$L = \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \left[2\ln(x+1) - \ln(x+2) \right]_0^1 = 2\ln 2 - \ln 3 + \ln 2.$$

$$L = 3\ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{8}{3}.$$

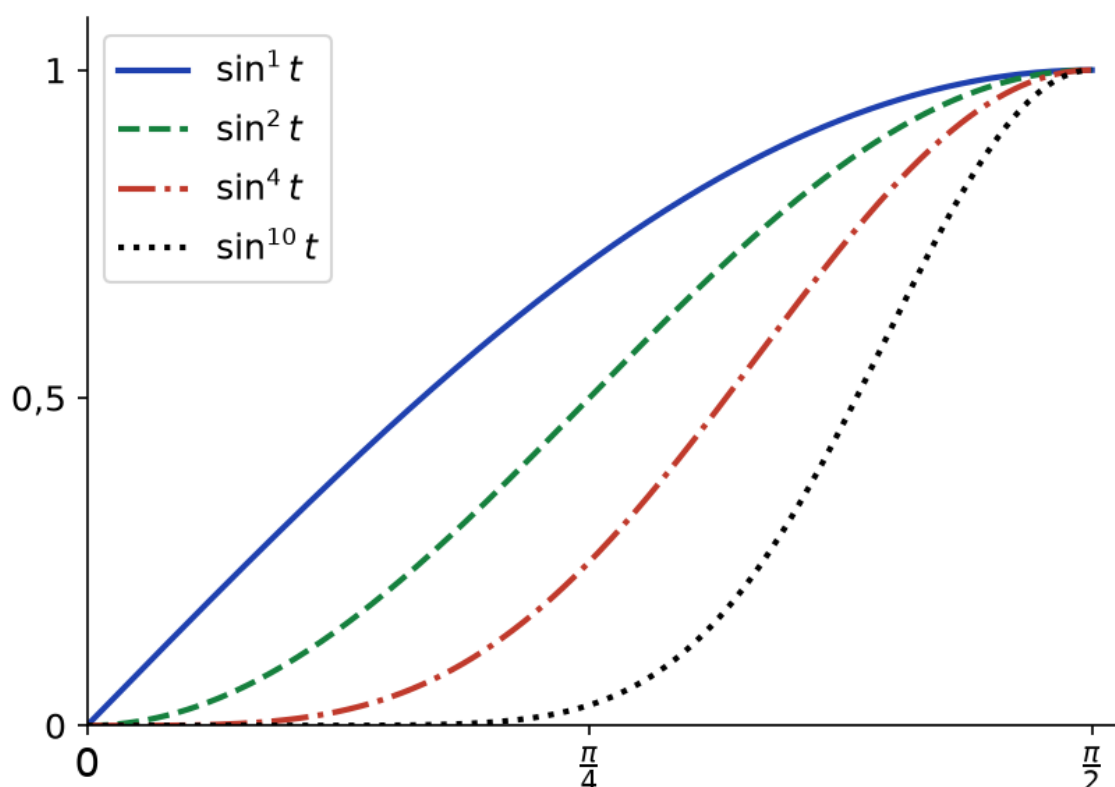
Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point (0,5 pour le choix de u et v , 1 pour le calcul) ; c) 1,5 point (0,5 pour les hypothèses et le changement, 1 pour le calcul) ; d) 1 point (0,5 pour la décomposition, 0,5 pour l'intégrale).

Exercice 4 : Problème : les intégrales de Wallis (8 points)

a. $W_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 0 + 1 = 1$. $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$.

b. La fonction $t \rightarrow \sin^n t$ est continue et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et elle n'est pas nulle (elle vaut 1 en $\frac{\pi}{2}$). D'après l'exercice 1, son intégrale est strictement positive : $W_n > 0$.

Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin t \leq 1$, donc $\sin^{n+1} t \leq \sin^n t$. Par croissance de l'intégrale, $W_{n+1} \leq W_n$. **La suite (W_n) est positive et décroissante.**



c. On écrit $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \times \sin t \, dt$ et on intègre par parties avec $u(t) = \sin^{n+1} t$ et $v(t) = -\cos t$, de classe C^1 , $u'(t) = (n+1)\cos t \sin^n t$:

$$W_{n+2} = [-\cos t \sin^{n+1} t]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^n t \, dt.$$

Le crochet est nul (car $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin 0 = 0$). Avec $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ et la linéarité :

$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2}), \text{ donc } (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

La relation de récurrence est démontrée.

d. Notons $\mathcal{P}(p)$ la formule annoncée. Pour $p = 0$, $\frac{0!}{1 \times 1} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_0$. Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie. D'après c) avec $n = 2p$:

$$W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2p+2)^2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)!}{4(p+1)^2 2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

Comme $4(p+1)^2 2^{2p} (p!)^2 = 2^{2p+2} ((p+1)!)^2$, $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. **Par récurrence**,
 $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$ **pour tout** p . Contrôle : $W_2 = \frac{2}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$, en accord avec
 $W_2 = \frac{1}{2} W_0$.

e. Posons $v_n = (n+1) W_{n+1} W_n$. Avec c) appliquée au rang n :

$$v_{n+1} = (n+2) W_{n+2} W_{n+1} = (n+1) W_n W_{n+1} = v_n.$$

La suite est constante, égale à $v_0 = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$. **Pour tout** n ,
 $(n+1) W_{n+1} W_n = \frac{\pi}{2}$.

f. Par décroissance et positivité, $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$. En divisant par $W_n > 0$ et avec c) :

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Par le théorème des gendarmes, $\frac{W_{n+1}}{W_n} \rightarrow 1$, c'est-à-dire $W_{n+1} \sim W_n$. Alors, d'après e),

$$W_n^2 \sim W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n}.$$

Comme $W_n > 0$, on peut passer à la racine carrée dans l'équivalent : $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Erreur fréquente : déduire $W_{n+1} \sim W_n$ de la seule décroissance ; il faut l'encadrement obtenu grâce à la relation de récurrence.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point (0,5 pour la positivité stricte, 0,5 pour la décroissance) ; c) 2 points (1 pour l'intégration par parties, 1 pour la relation) ; d) 1,5 point (0,5 pour l'initialisation, 1 pour l'hérédité) ; e) 1,5 point ; f) 1,5 point (0,75 pour la limite du quotient, 0,75 pour l'équivalent).

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : intégrale de Riemann, primitives et IPP

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Intégration sur un segment » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégration sur un segment](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : intégrales, équations différentielles et DL](#)