Corrigé du contrôle de maths L1 : géométrie du plan et de l'espace, distances

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : distances à un plan et à une droite	3 points
Exercice 2 : Un plan, une droite d'intersection et une distance	5 points
Exercice 3 : Produit mixte et volume d'un tétraèdre	4 points
Exercice 4 : Problème : distance à une droite et sphère tangente	8 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Question de cours : distances à un plan et à une droite (3 points)

a.

Le vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ est normal à $\mathcal{P}$. Soit H le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{P}$. Pour tout point N de $\mathcal{P}$, le triangle M_0HN est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, $M_0N^2 = M_0H^2 + HN^2 \geq M_0H^2$. Donc $d(M_0, \mathcal{P}) = M_0H$.

Ensuite, soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathcal{P}$; alors $a\,x_A + b\,y_A + c\,z_A = -d$. D'une part :

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{n} = a(x_0 - x_A) + b(y_0 - y_A) + c(z_0 - z_A) = a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d.$$

D'autre part, $\overrightarrow{AM_0} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM_0}$, avec $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = 0$. De plus, $\overrightarrow{HM_0}$ est colinéaire à $\vec{n}$. Donc $|\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{n}| = |\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n}| = M_0H \times |\vec{n}|$.

Ainsi $d(M_0, \mathcal{P}) = \dfrac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

b.

Soit H le projeté orthogonal de M sur Δ. Comme au a, $d(M, \Delta) = MH$. Ensuite, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} = \vec{0}$, car ces vecteurs sont colinéaires. Donc $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$.

Or $\overrightarrow{HM}$ est orthogonal à $\vec{u}$. Par conséquent, $|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}| = HM \times |\vec{u}|$. **Ainsi** $d(M, \Delta) = \dfrac{|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|}$.

Barème : a) 2 points : 0,5 point pour la distance égale à M_0H, 1 point pour le calcul du produit scalaire, 0,5 point pour la conclusion ; b) 1 point : 0,5 point pour l'élimination de $\overrightarrow{AH}$, 0,5 point pour la norme.

Exercice 2 : Un plan, une droite d'intersection et une distance (5 points)

a.

On a $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ et $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, -1)$. Si ces vecteurs étaient colinéaires, la

première coordonnée donnerait $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$, ce que la deuxième contredit ($2 \neq -1$). Donc A , B , C ne sont pas alignés et définissent un plan.

Une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ est : $x = 1 + s - t$, $y = s + 2t$, $z = 2 - s - t$, **avec** $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

b.

On calcule coordonnée par coordonnée :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \big(1 \times (-1) - (-1) \times 2,\ (-1) \times (-1) - 1 \times (-1),\ 1 \times 2 - 1 \times (-1)\big) = (1, 2, 3).$$

Ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, donc normal à $\mathcal{P}$. Une équation est donc $x + 2y + 3z = d$. Le point A donne $d = 1 + 0 + 6 = 7$.

Ainsi $\mathcal{P} : x + 2y + 3z = 7$ **.** Vérification : pour B , $2 + 2 + 3 = 7$; pour C , $0 + 4 + 3 = 7$.

c.

Les vecteurs normaux $\vec{n}_{\mathcal{P}} = (1, 2, 3)$ et $\vec{n}_{\mathcal{Q}} = (1, 1, -1)$ ne sont pas colinéaires. Le système formé par les deux équations est donc de rang 2 : les plans sont sécants selon une droite. On résout :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

Par différence, $y + 4z = 8$, donc $y = 8 - 4z$. Ensuite, $x = -1 - y + z = -9 + 5z$. En prenant z comme paramètre :

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$\Delta : x = -9 + 5t,\ y = 8 - 4t,\ z = t$, **avec** $t \in \mathbb{R}$.

Un vecteur directeur est $(5, -4, 1)$. Or $\vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q = (2 \times (-1) - 3 \times 1,\ 3 \times 1 - 1 \times (-1),\ 1 \times 1 - 2 \times 1) = (-5, 4, -1)$. Ces deux vecteurs sont bien colinéaires. On remarque aussi que A appartient à Δ (pour $t = 2$).

d.

D'après la formule de l'exercice 1 :

$$d(D, \mathcal{P}) = \frac{|2 + 2 \times (-1) + 3 \times 0 - 7|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{14}}.$$

Donc $d(D, \mathcal{P}) = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Erreur fréquente : oublier le terme constant -7 dans la formule de distance. Il faut écrire l'équation sous la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour le non-alignement, 0,5 point pour le paramétrage ; b) 1,5 point : 1 point pour le produit vectoriel, 0,5 point pour l'équation ; c) 1,5 point : 0,5 point pour la justification du rang, 0,5 point pour la résolution, 0,5 point pour la vérification de la direction ; d) 1 point.

Exercice 3 : Produit mixte et volume d'un tétraèdre (4 points)

a.

On a $\overrightarrow{AD} = (1, -1, -2)$. D'après l'exercice 2, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 2, 3)$. Donc :

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 1 - 2 - 6 = -7.$$

Le produit mixte vaut -7 . Son signe négatif indique que la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est indirecte.

b.

Le volume du tétraèdre vaut $V = \frac{|-7|}{6} = \frac{7}{6}$ unités de volume.

c.

L'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{1+4+9}$. **Donc l'aire de ABC vaut $\frac{\sqrt{14}}{2}$ unités d'aire.**

d.

La hauteur issue de D est la distance h de D au plan (ABC). Ainsi $\frac{7}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{14}}{2} \times h$, donc $h = \frac{7}{2} \times \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}}$. **On retrouve $d(D, \mathcal{P}) = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.**

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour $\overrightarrow{AD}$, 1 point pour le produit mixte ; b) 0,5 point ; c) 1 point ; d) 1 point : 0,5 point pour l'équation, 0,5 point pour la hauteur.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 4 : Problème : distance à une droite et sphère tangente (8 points)

Partie A : distance d'un point à une droite

a.

On a $\overrightarrow{EM} = (3, 0, 3)$ et $\vec{w} = (1, 2, 2)$. Donc :

$$\overrightarrow{EM} \wedge \vec{w} = (0 \times 2 - 3 \times 2,\ 3 \times 1 - 3 \times 2,\ 3 \times 2 - 0 \times 1) = (-6, -3, 6).$$

Sa norme vaut $\sqrt{36 + 9 + 36} = 9$, et $|\vec{w}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$. **Donc** $d(M, \mathcal{L}) = \frac{9}{3} = 3$.

b.

Le point $H = E + t\,\vec{w}$ est le projeté orthogonal de M si et seulement si $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{w} = 0$. Cela donne $\overrightarrow{EM} \cdot \vec{w} = t\,|\vec{w}|^2$. Or $\overrightarrow{EM} \cdot \vec{w} = 3 + 0 + 6 = 9$, donc $t = 1$. **Ainsi** $H(2, 3, 2)$.

Vérification : $\overrightarrow{MH} = (-2, 2, -1)$, et $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{w} = -2 + 4 - 2 = 0$. De plus, $MH = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$. **On retrouve bien** $MH = 3$.

Partie B : une sphère tangente au plan

c.

Une sphère de centre Ω est tangente à $\mathcal{P}$ si et seulement si son rayon r vaut $d(\Omega, \mathcal{P})$. Or :

$$d(\Omega, \mathcal{P}) = \frac{|1+4+9-7|}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}}, \quad r^2 = \frac{49}{14} = \frac{7}{2}.$$

Donc $\mathcal{S} : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{7}{2}$.

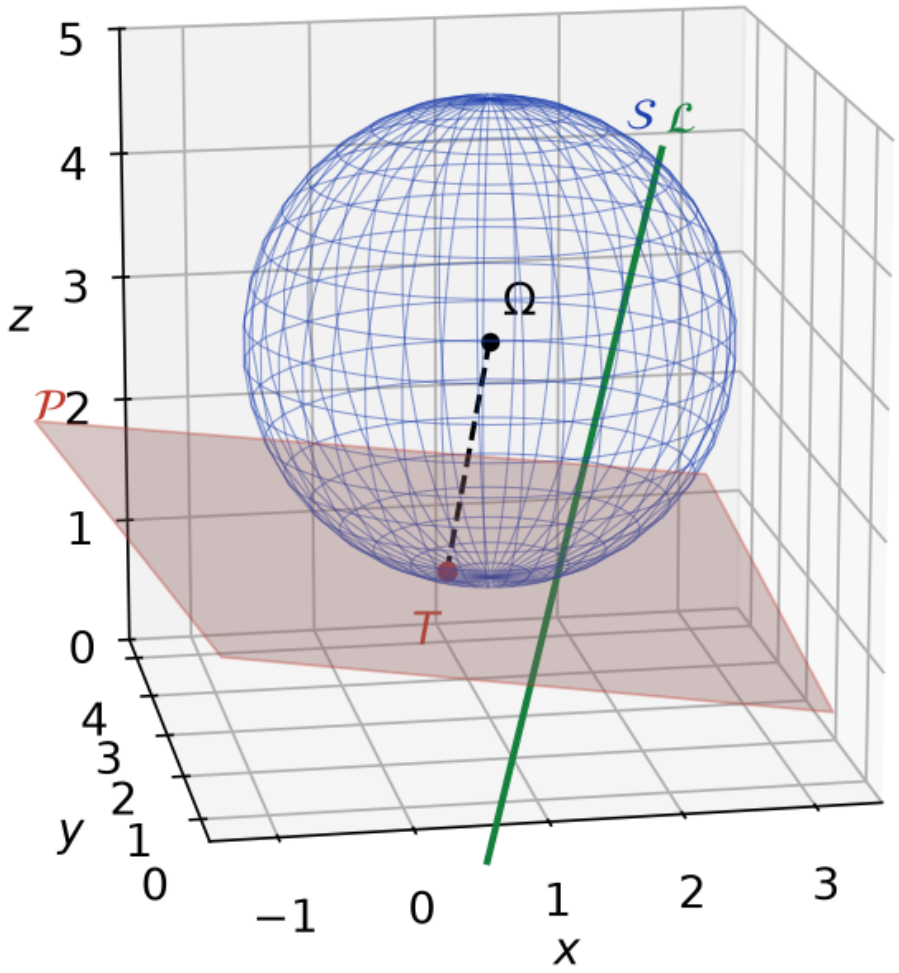
d.

Le point T est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$. On cherche donc $T = \Omega + k\,\vec{n}$, avec $\vec{n} = (1, 2, 3)$. On écrit que $T \in \mathcal{P}$:

$$(1+k) + 2(2+2k) + 3(3+3k) = 7 \Leftrightarrow 14 + 14k = 7 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Donc $T\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$**.** Vérification : $\frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} = 7$. De plus, $\Omega T = \frac{1}{2}\sqrt{14} = r$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



e.

La droite $\mathcal{L}$ coupe $\mathcal{S}$ si et seulement si $d(\Omega, \mathcal{L}) \leq r$. On a $\overrightarrow{E\Omega} = (0, 1, 3)$, puis :

$$\overrightarrow{E\Omega} \wedge \vec{w} = (1 \times 2 - 3 \times 2,\ 3 \times 1 - 0 \times 2,\ 0 \times 2 - 1 \times 1) = (-4, 3, -1).$$

Donc $d(\Omega, \mathcal{L}) = \frac{\sqrt{16 + 9 + 1}}{3} = \frac{\sqrt{26}}{3}$. Ensuite, on compare les carrés, qui sont positifs : $\frac{26}{9} < \frac{27}{9} = 3 < \frac{7}{2}$.

Ainsi $d(\Omega, \mathcal{L}) < r$: la droite $\mathcal{L}$ coupe la sphère $\mathcal{S}$ en deux points distincts.

Erreur fréquente : comparer $d(\Omega, \mathcal{L})$ au diamètre au lieu du rayon.

Barème : a) 1,5 point : 1 point pour le produit vectoriel, 0,5 point pour la distance ; b) 1,5 point : 1 point pour H , 0,5 point pour la vérification ; c) 1,5 point : 0,5 point pour la condition de tangence, 0,5 point pour le rayon, 0,5 point pour l'équation ; d) 1,5 point : 0,5 point pour la méthode, 1 point pour T ; e) 2 points : 1 point pour la distance, 0,5 point pour la comparaison, 0,5 point pour la conclusion.

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : géométrie du plan et de l'espace, distances

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Géométrie du plan et de l'espace » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** géométrie du plan et de l'espace.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L1** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.