

Corrigé du contrôle de maths L1 : formules de Taylor et développements limités

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : unicité du développement limité	3 points
Exercice 2 : Inégalité de Taylor-Lagrange pour le sinus	4 points
Exercice 3 : Développements limités, limites et équivalents	5 points
Exercice 4 : Position d'une courbe par rapport à sa tangente	3 points
Exercice 5 : Problème : asymptote oblique d'une fonction	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : unicité du développement limité (3 points)

- a. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que, au voisinage de 0 ,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n),$$

c'est-à-dire qu'il existe une fonction ε définie au voisinage de 0 , de limite nulle en 0 , telle que

$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$. Le polynôme $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ est la **partie régulière** du développement.

b. Supposons que $\sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$. En soustrayant, on obtient

$$\sum_{k=0}^n (a_k - b_k) x^k = o(x^n).$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que les deux familles de coefficients ne sont pas égales. Notons alors p le plus petit indice tel que $a_p \neq b_p$. On a $p \leq n$ et, pour $x \neq 0$, en divisant par x^p :

$$(a_p - b_p) + \sum_{k=p+1}^n (a_k - b_k) x^{k-p} = o(x^{n-p}).$$

Quand x tend vers 0 , le membre de gauche tend vers $a_p - b_p$, car chaque terme de la somme contient une puissance x^{k-p} avec $k - p \geq 1$. Le membre de droite tend vers 0 , car $n - p \geq 0$ et un $o(x^{n-p})$ tend donc vers 0 . Par unicité de la limite, $a_p - b_p = 0$, ce qui contredit le choix de p . **Donc $a_k = b_k$ pour tout k : le développement limité est unique.**

Barème : a) 1 point (0,5 pour l'écriture, 0,5 pour la définition précise du petit o) ; b) 2 points : 0,5 pour la soustraction, 0,5 pour le choix du plus petit indice, 1 point pour le passage à la limite correctement justifié.

Exercice 2 : Inégalité de Taylor-Lagrange pour le sinus (4 points)

a. **Inégalité de Taylor-Lagrange.** Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I , et $a, x \in I$. Si M majore $|f^{(n+1)}|$ sur le segment d'extrémités a et x , alors

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{M |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

b. La fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ses dérivées successives en 0 valent $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $-\sin 0 = 0$, $-\cos 0 = -1$ et $\sin 0 = 0$. Le polynôme de Taylor à l'ordre 4 en 0 est donc

$$T_4(x) = x - \frac{x^3}{6},$$

car le terme de degré 4 est nul. De plus, $\sin^{(5)} = \cos$, et $|\cos t| \leq 1$ pour tout réel t : on peut prendre $M = 1$. L'inégalité de Taylor-Lagrange avec $n = 4$ et $a = 0$ donne alors, pour tout réel x ,

$$\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{|x|^5}{5!} = \frac{|x|^5}{120}.$$

L'inégalité demandée est démontrée.

c. Pour $x = 0,1$, la valeur approchée est

$$0,1 - \frac{0,001}{6} = 0,1 - 0,000\,166\,6\dots = 0,099\,833\,3\dots$$

L'erreur est majorée par

$$\frac{(0,1)^5}{120} = \frac{10^{-5}}{120} \approx 8,3 \times 10^{-8} < 10^{-7}.$$

Ainsi $\sin(0,1) \approx 0,099\,833\,3$, à 10^{-7} près.

Erreur fréquente : appliquer la formule à l'ordre 3 donne seulement une majoration en $\frac{x^4}{24}$. En remarquant que le terme de degré 4 est nul, on gagne un ordre gratuitement.

Barème : a) 1 point (hypothèses 0,5, inégalité 0,5) ; b) 1,5 point : 0,5 pour le polynôme de Taylor, 0,5 pour le choix de $M = 1$, 0,5 pour la conclusion ; c) 1,5 point : 0,5 pour la valeur approchée, 1 point pour la majoration de l'erreur.

Exercice 3 : Développement limités, limites et équivalents (5 points)

a. Chaque facteur est équivalent à une constante ou à x . Comme $\sin x$ commence par x , il suffit de développer e^x à l'ordre 2 et $\sin x$ à l'ordre 3 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

En développant le produit et en ne gardant que les termes de degré au plus 3 :

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Donc $e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$

- b. On écrit $\cos x = 1 + u$ avec $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, qui tend vers 0. Comme $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ et $u^3 = o(x^4)$, il suffit du développement $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Par composition :

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

Or $\frac{1}{24} - \frac{3}{24} = -\frac{2}{24} = -\frac{1}{12}$. **Donc** $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$.

- c. D'après a), le numérateur vaut $e^x \sin x - x - x^2 = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Par ailleurs, $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Ainsi, pour $x \neq 0$ proche de 0 :

$$\frac{e^x \sin x - x - x^2}{x - \sin x} = \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{\frac{1}{6} + o(1)} \longrightarrow \frac{1/3}{1/6} = 2.$$

La limite vaut 2.

- d. Pour $(x > 0)$, $(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$. Or $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x).$$

Posons $v = -\frac{x}{2} + o(x)$, qui tend vers 0. Alors

$$(1+x)^{1/x} = e \cdot e^v = e(1 + v + o(v)) = e - \frac{ex}{2} + o(x).$$

Par conséquent $(1+x)^{1/x} - e \sim -\frac{ex}{2}$ **quand x tend vers 0.**

Erreur fréquente : en b), oublier le terme $-\frac{u^2}{2}$ sous prétexte que u est « petit » : il contribue pourtant à l'ordre 4.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour les ordres choisis, 1 point pour le résultat ; b) 1,5 point : 0,5 pour la composition, 0,5 pour le terme en u^2 , 0,5 pour le résultat ; c) 1 point : 0,5 par développement utilisé, résultat compris ; d) 1 point : 0,5 pour l'écriture exponentielle, 0,5 pour l'équivalent.

Exercice 4 : Position d'une courbe par rapport à sa tangente (3 points)

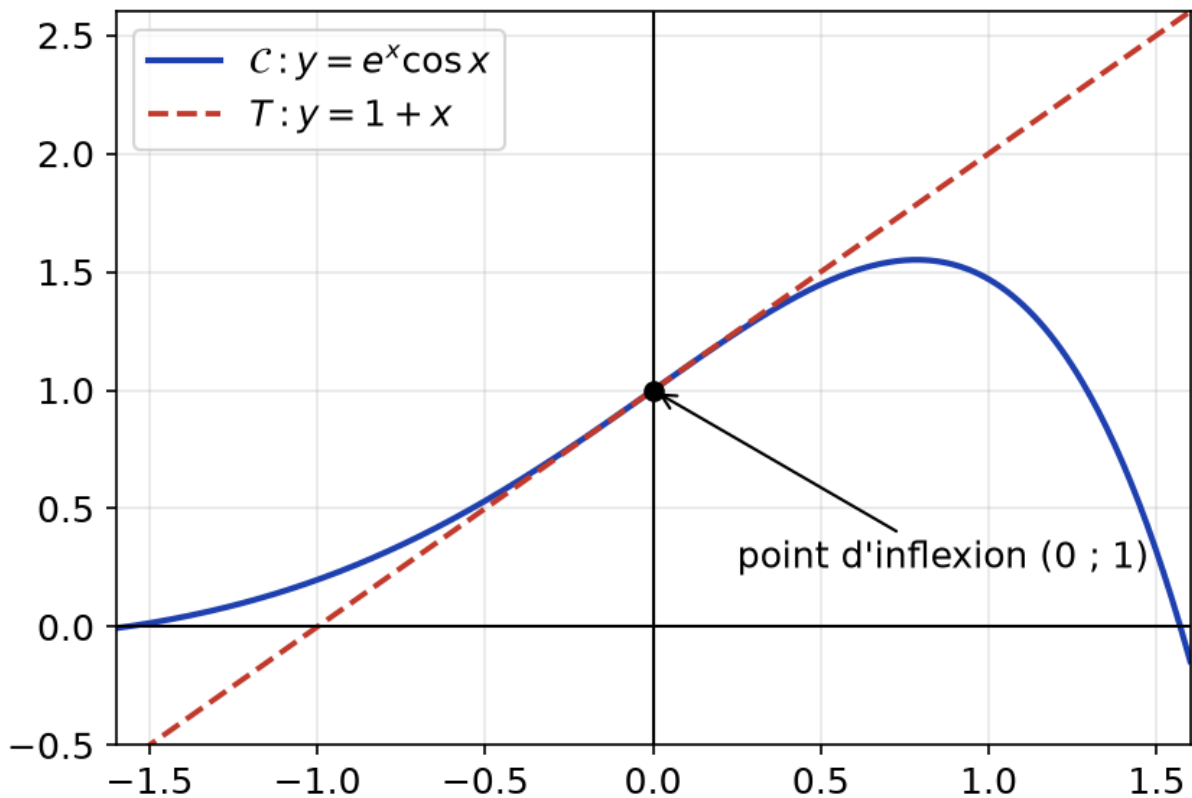
- a. On a $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. Le produit, tronqué à l'ordre 3, donne :

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

Donc $f(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. On peut le contrôler avec les dérivées :
 $f''(x) = -2e^x \sin x$ et $f^{(3)}(0) = -2$, d'où le coefficient $-\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$.

- b. Par unicité du développement limité, $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. **La tangente T a pour équation $y = 1 + x$.**

- c. On a $f(x) - (1 + x) = -\frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc $f(x) - (1 + x) \sim -\frac{x^3}{3}$. Deux fonctions équivalentes ont le même signe au voisinage du point. Ainsi $f(x) - (1 + x)$ est positif pour $x < 0$ proche de 0, et négatif pour $(x > 0)$ proche de 0. **La courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de T à gauche de 0 et en dessous à droite : elle traverse sa tangente, et le point $(0;1)$ est un point d'inflexion.**



Barème : a) 1,5 point (1 point pour le calcul, 0,5 pour la troncature correcte) ; b) 0,5 point ; c) 1 point : 0,5 pour le signe via l'équivalent, 0,5 pour la conclusion « point d'inflexion ».

Exercice 5 : Problème : asymptote oblique d'une fonction (5 points)

- a. Quand x tend vers $\pm\infty$, $u = \frac{1}{x}$ tend vers 0. Or $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$. En remplaçant u par $\frac{1}{x}$ puis en multipliant par x :

$$g(x) = x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) = x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

C'est le développement asymptotique demandé.

- b. D'après a), $g(x) - (x + 1) = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, qui tend vers 0 en $\pm\infty$. **La droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à f en $+\infty$ et en $-\infty$.** De plus, $g(x) - (x + 1) \sim \frac{1}{2x}$, qui a le signe de x . **Au voisinage de $+\infty$, f est au-dessus de**

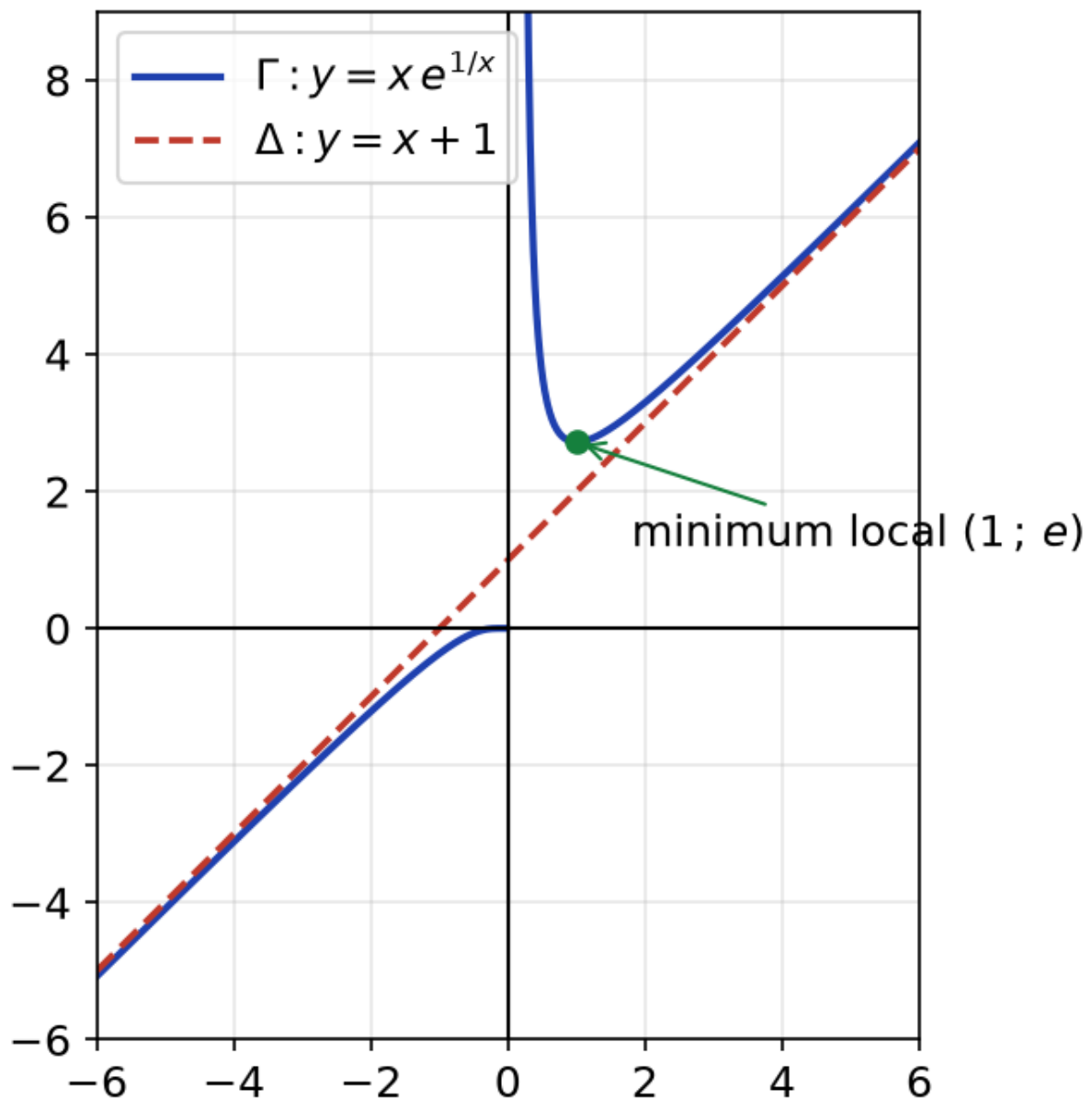
Δ ; au voisinage de $-\infty$, elle est en dessous.

- c. En 0^+ : posons $t = \frac{1}{x}$, qui tend vers $+\infty$. Alors $g(x) = \frac{e^t}{t}$, qui tend vers $+\infty$ par croissances comparées. En 0^- : $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$, donc $e^{1/x}$ tend vers 0 , et x aussi.
Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ **et** $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$.

- d. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables. Pour $x \neq 0$:

$$g'(x) = e^{1/x} + x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} = e^{1/x} \frac{x-1}{x}.$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $\frac{x-1}{x}$: positif sur $] -\infty ; 0[$, négatif sur $] 0 ; 1[$, positif sur $] 1 ; +\infty[$. Par conséquent, g croît de $-\infty$ à 0 sur $] -\infty ; 0[$. Elle décroît de $+\infty$ à $g(1) = e$ sur $] 0 ; 1]$, puis croît de e à $+\infty$ sur $[1 ; +\infty[$. **Ce tableau est compatible avec b) : en $\pm\infty$, $g(x)$ se comporte comme $x+1$, donc tend vers $\pm\infty$ en croissant.**



Barème : a) 1,5 point (0,5 pour le changement de variable, 1 point pour le développement) ; b) 1,5 point : 0,5 pour l'équation de Δ , 1 point pour les deux positions ; c) 1 point : 0,5 par limite ; d) 1 point : 0,5 pour la dérivée, 0,5 pour le tableau et la cohérence.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : formules de Taylor et développements limités

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Développements limités](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [développements limités](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : intégrales, équations différentielles et DL](#)