Corrigé du contrôle de maths L1 : fonctions réciproques, arctan et hyperboliques

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Dérivées des fonctions réciproques	4 points
Exercice 2 : Identités et simplifications circulaires	5 points
Exercice 3 : Fonctions hyperboliques	5 points
Exercice 4 : Étude d'une fonction composée avec arctan	6 points
Total	**20 points**

Exercice 1 : Dérivées des fonctions réciproques (4 points)

a. **Théorème de la bijection : si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors $J = f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I sur J ; sa réciproque f^{-1} est continue sur J et de même monotonie que f.**

Dérivabilité de la réciproque : si de plus f est dérivable en $a \in I$ avec $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

b. La fonction $\tan$ est continue et dérivable sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, avec $\tan' = 1 + \tan^2 > 0$: elle y est strictement croissante. Ses limites aux bornes sont $-\infty$ et $+\infty$. Par le théorème de la bijection, $\tan$ **réalise une bijection de I sur $\mathbb{R}$**, dont la réciproque est $\arctan$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Comme $\tan'$ ne s'annule jamais, $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

c. La fonction $\sin$ est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, à valeurs dans $[-1,1]$: sa réciproque est $\arcsin$. Sa dérivée $\cos$ ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, dont l'image est $]-1,1[$. Donc $\arcsin$ est dérivable sur $]-1,1[$ et $\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$.

Pour $x \in]-1,1[$, $\theta = \arcsin x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\theta > 0$ et $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$. **Ainsi** $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Erreur fréquente : écrire $\cos\theta = \pm\sqrt{1-x^2}$ sans trancher. C'est l'intervalle de θ qui impose le signe positif.

Barème : a) 1 point : 0,5 point par énoncé ; b) 1,5 point : 0,5 point pour la bijection, 1 point pour le calcul de la dérivée ; c) 1,5 point : 0,5 point pour la dérivabilité sur l'intervalle ouvert, 1 point pour $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ justifié.

Exercice 2 : Identités et simplifications circulaires (5 points)

a. On pose $g(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. La fonction g est dérivable et

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, une fonction de dérivée nulle est constante : $g(x) = g(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Sur l'intervalle $]-\infty,0[$, $g(x) = g(-1) = -\frac{\pi}{2}$ (on peut

aussi utiliser l'imparité de g).

Pour $x>0$, $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$; pour $x<0$, cette somme vaut $-\frac{\pi}{2}$.

b. Par définition, $\arcsin(\sin x)$ est l'unique $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\theta=\sin x$. Pour $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, on a $\pi-x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin(\pi-x)=\sin x$. **Donc $\arcsin(\sin x)=\pi-x$.**

c. Avec $3{,}14<\pi<3{,}15$, on obtient $9{,}42<3\pi<9{,}45$, donc $-0{,}58<3\pi-10<-0{,}55$. En particulier $3\pi-10\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Par ailleurs, $\sin(3\pi-10)=\sin(\pi-10+2\pi)=\sin(\pi-10)=\sin 10$.

Donc $\arcsin(\sin 10)=3\pi-10$, qui vaut environ $-0{,}575$.

Erreur fréquente : écrire $\arcsin(\sin 10)=10$. La fonction $\arcsin$ prend ses valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, qui ne contient pas 10.

Barème : a) 2 points : 1 point pour $g'=0$, 0,5 point pour la constante sur chaque intervalle, 0,5 point pour le cas $x<0$; b) 1,5 point : 0,5 point pour la définition, 1 point pour $\pi-x$ justifié ; c) 1,5 point : 0,5 point pour l'encadrement, 0,5 point pour l'égalité des sinus, 0,5 point pour le résultat.

Exercice 3 : Fonctions hyperboliques (5 points)

a. Pour tout réel x :

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=(\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x)=\mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^{x}=1.$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Les fonctions ch et sh sont dérivables avec $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$, et $\mathrm{ch} > 0$. Par la dérivée d'un quotient :

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x.$$

b. On pose $X = \mathrm{e}^x > 0$. L'équation devient $X + \frac{1}{X} = 4$, soit $X^2 - 4X + 1 = 0$. Son discriminant vaut $16 - 4 = 12$, donc $X = 2 + \sqrt{3}$ ou $X = 2 - \sqrt{3}$, deux réels strictement positifs. Comme $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$, on a $\ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 + \sqrt{3})$.

Les solutions sont $x = \ln(2 + \sqrt{3})$ et $x = -\ln(2 + \sqrt{3})$.

c. La fonction sh est continue, dérivable, et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch} > 0$: elle est strictement croissante. Ses limites sont $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Par le théorème de la bijection, sh **réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.**

Soit x réel. On cherche y tel que $\mathrm{sh}\, y = x$. Avec $Y = \mathrm{e}^y > 0$, l'équation devient $Y - \frac{1}{Y} = 2x$, soit $Y^2 - 2xY - 1 = 0$. Ses racines sont $x + \sqrt{x^2 + 1}$ et $x - \sqrt{x^2 + 1}$. Comme $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$, la seconde est strictement négative et la première strictement positive. Donc $Y = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

Ainsi $\mathrm{argsh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ pour tout réel x.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la relation fondamentale, 1 point pour th' ; b) 1,5 point : 0,5 point pour l'équation du second degré, 0,5 point pour les racines positives, 0,5 point pour les solutions ; c) 2 points : 0,5 point pour la bijection, 1 point pour la résolution, 0,5 point pour le choix de la racine positive.

Exercice 4 : Étude d'une fonction composée avec arctan (6 points)

a. La fonction $u : x \to \frac{x-1}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (fonction rationnelle) et $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $f' = \frac{u'}{1+u^2}$, avec

$$u'(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}, \quad 1+u(x)^2 = \frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2}{(x+1)^2}.$$

Donc $f'(x) = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{1+x^2}$**.**

b. La fonction $f - \arctan$ a une dérivée nulle sur chacun des intervalles $]-1, +\infty[$ et $]-\infty, -1[$, donc elle est constante sur chacun d'eux.

Sur $]-1, +\infty[$: en 0, $f(0) - \arctan 0 = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$. **Donc** $f(x) = \arctan x - \frac{\pi}{4}$**.**

Sur $]-\infty, -1[$: quand x tend vers $-\infty$, $u(x)$ tend vers 1, donc $f(x) - \arctan x$ tend vers $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$. **Donc** $f(x) = \arctan x + \frac{3\pi}{4}$**.**

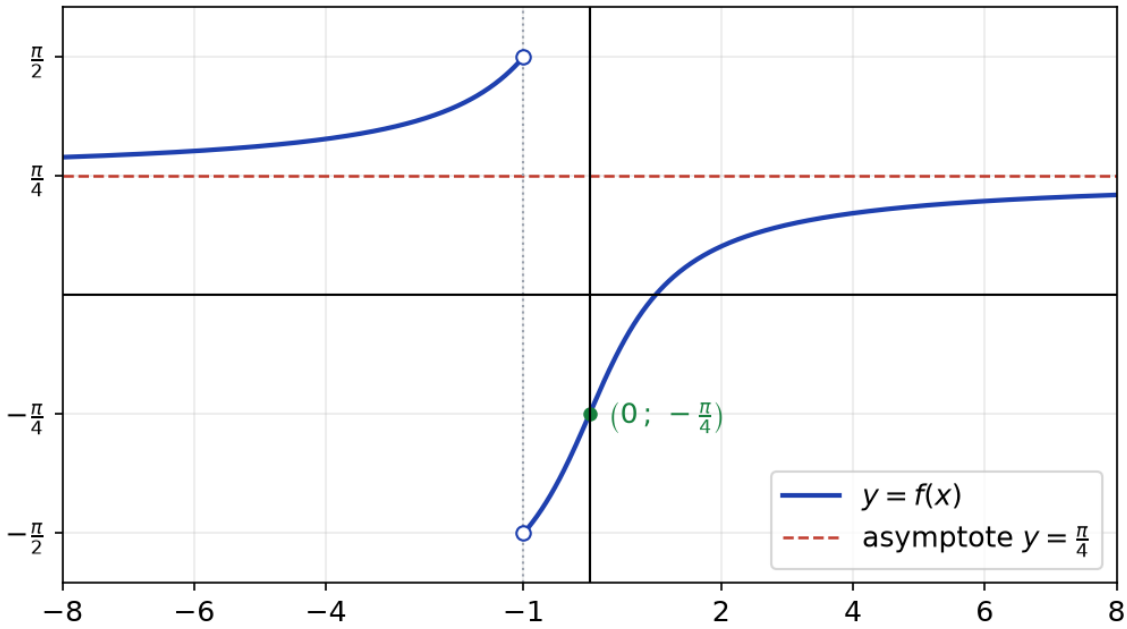
Les constantes diffèrent parce que $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ n'est pas un intervalle : une dérivée nulle n'entraîne la constance que sur un intervalle.

c. D'après b) : en $+\infty$, $f(x)$ tend vers $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$; en $-\infty$, vers $-\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. À droite en -1, $f(x)$ tend vers $-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$; à gauche, vers $-\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Comme $f' > 0$, f **est strictement croissante sur** $]-\infty, -1[$ **et sur** $]-1, +\infty[$. **La droite d'équation** $y = \frac{\pi}{4}$ **est asymptote horizontale en** $-\infty$ **et en** $+\infty$**.** Il n'y a pas d'asymptote verticale, car les limites en -1 sont finies.

d. Les limites à gauche et à droite en -1 sont $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$: elles sont différentes, donc f **n'est pas prolongeable par continuité en** -1. La courbe présente un saut d'amplitude π :

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Barème : a) 2 points : 0,5 point pour la dérivabilité, 1 point pour u' *et* $1+u^2$*, 0,5 point pour la simplification ; b) 1,5 point : 0,5 point par intervalle, 0,5 point pour l'explication ; c) 1,5 point : 1 point pour les quatre limites, 0,5 point pour les variations et l'asymptote ; d) 1 point : 0,5 point pour la réponse justifiée, 0,5 point pour l'allure de la courbe.*

Revenir à l'énoncé du contrôle

Après le corrigé du contrôle : fonctions réciproques, arctan et hyperboliques

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « Fonctions usuelles » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** fonctions usuelles.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L1** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.