

Corrigé du contrôle de maths L1 : familles libres, bases et dimension

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : lemme d'échange et dimension	3 points
Exercice 2 : Familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$	4 points
Exercice 3 : Liberté de familles de fonctions	4 points
Exercice 4 : Sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ et formule de Grassmann	4 points
Exercice 5 : Problème : bases de $\mathbb{R}_2[X]$ et interpolation de Lagrange	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : lemme d'échange et dimension (3 points)

- a. **Lemme d'échange.** Si E est engendré par une famille de n vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$, alors toute famille de $n + 1$ vecteurs de E est liée. Par conséquent, toute famille libre de E a au plus n éléments.
- b. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}(n)$: « dans tout espace vectoriel, $n + 1$ vecteurs appartenant à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ forment une famille liée ».

Initialisation. Pour $n = 0$, $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$: le seul vecteur considéré est nul, et une famille contenant le vecteur nul est liée.

Hérédité. Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Soit $v_1, \dots, v_{n+2}$ dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1})$. On écrit $v_i = w_i + a_i e_{n+1}$, avec $w_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et $a_i \in \mathbb{K}$.

Premier cas : tous les a_i sont nuls. Alors $v_1, \dots, v_{n+1}$ sont dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, donc liés par $\mathcal{H}(n)$, et la famille entière est liée.

Second cas : un des a_i est non nul, disons $a_{n+2} \neq 0$ quitte à renuméroter. Pour $1 \leq i \leq n+1$, posons $v'_i = v_i - \frac{a_i}{a_{n+2}} v_{n+2}$. La composante sur e_{n+1} disparaît, donc ces $n+1$ vecteurs sont dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Par $\mathcal{H}(n)$, il existe des scalaires

$\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v'_i = 0$. Cette égalité s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\lambda_i a_i}{a_{n+2}} \right) v_{n+2} = 0,$$

qui est une relation non triviale entre $v_1, \dots, v_{n+2}$. Donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie, et le lemme est démontré par récurrence.

- c. Soit $\mathcal{B}$ une base de E à n éléments ; elle engendre E . Une famille extraite d'une famille libre est libre. Donc, par le lemme, une famille libre de E ne peut pas contenir $n+1$ vecteurs : toute base $\mathcal{B}'$ de E est finie, avec $p \leq n$ éléments. En échangeant les rôles, puisque $\mathcal{B}'$ engendre E et que $\mathcal{B}$ est libre, on obtient $n \leq p$. Ainsi $p = n$: **toutes les bases ont le même cardinal, appelé dimension de E .**

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 0,25 pour l'initialisation, 0,25 pour le premier cas, 1 point pour le second cas (élimination de e_{n+1} et relation non triviale) ; c) 1 point : 0,5 pour la finitude, 0,5 pour l'égalité des cardinaux.

Exercice 2 : Familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (4 points)

- a. On calcule $u_1 - u_2 = (-1, 1, 2) = -u_3$. Ainsi

$$u_1 - u_2 + u_3 = (1 - 2 + 1, 2 - 1 - 1, 1 + 1 - 2) = (0, 0, 0).$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est liée, avec la relation $u_1 - u_2 + u_3 = 0$.

- b. Soit a, b, c réels tels que $a u_1 + b u_2 + c u_4 = 0$. Coordonnée par coordonnée, cela donne le système

$$a + 2b + c = 0, \quad 2a + b = 0, \quad a - b + c = 0.$$

La deuxième équation donne $b = -2a$. La première devient $a - 4a + c = 0$, donc $c = 3a$. La troisième s'écrit alors $a + 2a + 3a = 6a = 0$, donc $a = 0$, puis $b = c = 0$. **La famille (u_1, u_2, u_4) est libre.**

- c. C'est une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3. **C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.** On cherche a, b, c tels que $a u_1 + b u_2 + c u_4 = (1, 3, 4)$:

$$a + 2b + c = 1, \quad 2a + b = 3, \quad a - b + c = 4.$$

En soustrayant la troisième équation de la première, on obtient $3b = -3$, donc $b = -1$. Puis $2a = 3 + 1$, donc $a = 2$, et enfin $c = 4 - 2 - 1 = 1$. Vérification : $2u_1 - u_2 + u_4 = (2 - 2 + 1, 4 - 1 + 0, 2 + 1 + 1) = (1, 3, 4)$. **Les coordonnées de v sont $(2, -1, 1)$.**

- d. Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, puisque $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$), donc (u_1, u_2) est libre. De plus $u_3 = u_2 - u_1 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$. **Le rang de (u_1, u_2, u_3) vaut 2, et (u_1, u_2) est une base de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.**

Barème : a) 1 point (relation 0,5, vérification 0,5) ; b) 1,5 point : 0,5 pour le système, 1 point pour la résolution ; c) 1 point : 0,5 pour l'argument de dimension, 0,5 pour les coordonnées ; d) 0,5 point.

Exercice 3 : Liberté de familles de fonctions (4 points)

- a. Soit a, b, c réels tels que, pour tout réel x , $a e^x + b e^{2x} + c e^{3x} = 0$. En divisant par $e^{3x} \neq 0$:

$$a e^{-2x} + b e^{-x} + c = 0 \text{ pour tout } x.$$

Quand x tend vers $+\infty$, le membre de gauche tend vers c , donc $c = 0$. Il reste $a e^x + b e^{2x} = 0$. En divisant par e^{2x} , on obtient $a e^{-x} + b = 0$, et la limite en $+\infty$ donne $b = 0$. Enfin $a e^x = 0$ impose $a = 0$. **La famille (f_1, f_2, f_3) est libre.**

- b. Soit a, b, c réels tels que $a \cos x + b \sin x + c x \cos x = 0$ pour tout réel x . On évalue en trois points bien choisis. En $x = 0$: $a = 0$. En $x = \pi$: $-a - c\pi = 0$, donc

$c = 0$. En $x = \frac{\pi}{2}$: $b = 0$. **La famille $(\cos, \sin, h)$ est libre.**

c. D'après la formule d'addition, pour tout réel x ,

$$g(x) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x.$$

Ainsi $g - \frac{1}{2}\cos + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin = 0$, relation dont les coefficients ne sont pas tous nuls. **La famille $(\cos, \sin, g)$ est liée.**

Erreur fréquente : évaluer en un seul point et conclure. Une égalité entre fonctions doit être exploitée en plusieurs points, par des limites ou par dérivation.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 par coefficient correctement annulé ; b) 1,5 point : 0,5 par évaluation ; c) 1 point : 0,5 pour la formule d'addition, 0,5 pour la conclusion.

Exercice 4 : Sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ et formule de Grassmann (4 points)

a. Un vecteur de F vérifie $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$. Ainsi

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1).$$

Les trois vecteurs $\varepsilon_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (-1, 0, 1, 0)$ et $\varepsilon_3 = (-1, 0, 0, 1)$ engendrent donc F . Ils sont libres : une combinaison nulle $\alpha \varepsilon_1 + \beta \varepsilon_2 + \gamma \varepsilon_3$ a pour trois dernières coordonnées α, β, γ , qui sont donc nulles. **$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de F , et $\dim F = 3$.**

b. Les vecteurs de G sont les $(a, a, b, b) = a(1, 1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. **$((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ est une base de G , et $\dim G = 2$.**

c. Un vecteur (a, a, b, b) de G appartient à F si et seulement si $2a + 2b = 0$, soit $b = -a$. Donc $F \cap G = \{(a, a, -a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$.
 $F \cap G = \text{Vect}((1, 1, -1, -1))$ est une droite : $\dim(F \cap G) = 1$.

d. La formule de Grassmann donne

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Comme $F \cap G \neq \{0\}$, la somme n'est pas directe. Enfin, $F + G$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension $4 = \dim \mathbb{R}^4$. Donc $F + G = \mathbb{R}^4$.

- e. Les vecteurs $e = (1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, -1)$ sont dans F , car la somme de leurs coordonnées est nulle. Montrons qu'ils sont libres. Si $a e + b (1, -1, 0, 0) + c (0, 0, 1, -1) = 0$, les deux premières coordonnées donnent $a + b = 0$ et $a - b = 0$, donc $a = b = 0$, puis $c = 0$. On a trois vecteurs libres dans F , de dimension 3. La famille $((1, 1, -1, -1), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$ est une base de F qui complète celle de $F \cap G$.

Barème : a) 1 point (0,5 pour la famille génératrice, 0,5 pour la liberté et la dimension) ; b) 0,5 point ; c) 1 point : 0,5 pour l'équation, 0,5 pour la base ; d) 1 point : 0,5 pour Grassmann, 0,5 pour les deux conclusions ; e) 0,5 point.

Exercice 5 : Problème : bases de $\mathbb{R}_2[X]$ et interpolation de Lagrange (5 points)

- a. Les polynômes 1 , $X - 1$ et $(X - 1)^2$ sont de degrés respectifs 0 , 1 et 2 . Une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre (on regarde le terme de plus haut degré d'une combinaison nulle). C'est donc une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}_2[X]$, de dimension 3 : **c'est une base**. Pour $P = X^2 + X + 1$, on écrit $X = (X - 1) + 1$, d'où $X^2 = (X - 1)^2 + 2(X - 1) + 1$. Alors

$$P = (X - 1)^2 + 2(X - 1) + 1 + (X - 1) + 1 + 1 = (X - 1)^2 + 3(X - 1) + 3.$$

Les coordonnées de P dans cette base sont $(3, 3, 1)$. Contrôle : $P(1) = 3$ et $P'(1) = 2 + 1 = 3$.

- b. On calcule : $L_0(0) = \frac{(-1)(-2)}{2} = 1$, $L_0(1) = 0$, $L_0(2) = 0$. Ensuite $L_1(0) = 0$, $L_1(1) = -1 \times (-1) = 1$, $L_1(2) = 0$. Enfin $L_2(0) = 0$, $L_2(1) = 0$, $L_2(2) = \frac{2 \times 1}{2} = 1$. Ainsi $L_i(j) = 1$ si $i = j$ et $L_i(j) = 0$ sinon.

- c. Soit a_0, a_1, a_2 réels tels que $a_0 L_0 + a_1 L_1 + a_2 L_2 = 0$. En évaluant en $j \in \{0, 1, 2\}$, la question b) donne $a_j = 0$. La famille est donc libre. Elle compte 3 éléments dans un espace de dimension 3. Donc (L_0, L_1, L_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

- d. Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Comme (L_0, L_1, L_2) est une base, il existe des réels c_0, c_1, c_2 tels

que $Q = c_0 L_0 + c_1 L_1 + c_2 L_2$. En évaluant en j , la question b) donne $Q(j) = c_j$.
Donc $Q = Q(0) L_0 + Q(1) L_1 + Q(2) L_2$: les coordonnées de Q dans la base de Lagrange sont ses valeurs en $0, 1, 2$.

e. D'après d), l'unique polynôme cherché est $Q = L_0 + 3L_1 + 7L_2$. En développant

$$L_0 = \frac{X^2 - 3X + 2}{2}, \quad L_1 = -X^2 + 2X \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{X^2 - X}{2} :$$

$$Q = \left(\frac{1}{2} - 3 + \frac{7}{2}\right) X^2 + \left(-\frac{3}{2} + 6 - \frac{7}{2}\right) X + 1 = X^2 + X + 1.$$

On retrouve $Q = P = X^2 + X + 1$, qui vérifie bien $P(0) = 1$, $P(1) = 3$ et $P(2) = 7$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour la liberté, 0,25 pour l'argument de dimension, 0,75 pour les coordonnées ;
b) 1 point ; c) 1 point ; d) 1 point : 0,5 pour l'existence des coordonnées, 0,5 pour l'évaluation ; e) 0,5 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : familles libres, bases et dimension

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Bases et dimension](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [bases et dimension](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).