

Corrigé du contrôle de maths L1 : espaces vectoriels et sous-espaces

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : intersection et union de sous-espaces	3 points
Exercice 2 : Une structure d'espace vectoriel inhabituelle	4 points
Exercice 3 : Sous-espaces vectoriels ou non	5 points
Exercice 4 : Sous-espace engendré et somme directe dans $\mathbb{R}^3$	4 points
Exercice 5 : Problème : fonctions paires et fonctions impaires	4 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : intersection et union de sous-espaces (3 points)

- a. **Caractérisation.** Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F contient le vecteur nul 0_E et, pour tous $u, v \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u + v \in F$.
- b. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E . D'abord, $0_E \in F$ et $0_E \in G$, donc $0_E \in F \cap G$. Ensuite, soit $u, v \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme $u, v \in F$ et que F est un sous-espace, $\lambda u + v \in F$. De même, $\lambda u + v \in G$. Donc $\lambda u + v \in F \cap G$.
Par la caractérisation, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .
- c. Dans $\mathbb{R}^2$, prenons $F = \mathbb{R} \times \{0\}$ (l'axe des abscisses) et $G = \{0\} \times \mathbb{R}$ (l'axe des

ordonnées), qui sont des sous-espaces vectoriels. On a $(1, 0) \in F \cup G$ et $(0, 1) \in F \cup G$, mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ n'appartient ni à F ni à G . **La réunion $F \cup G$ n'est pas stable par addition : ce n'est pas un sous-espace vectoriel.**

Barème : a) 1 point (0,5 pour le vecteur nul, 0,5 pour la stabilité) ; b) 1 point : 0,5 pour le vecteur nul, 0,5 pour la stabilité ; c) 1 point pour un contre-exemple complet et vérifié.

Exercice 2 : Une structure d'espace vectoriel inhabituelle (4 points)

a. La loi $\oplus$ est interne : le produit de deux réels strictement positifs est strictement positif. Elle est associative et commutative, car la multiplication des réels l'est. L'élément neutre est $1 \in E$, puisque $x \oplus 1 = x \times 1 = x$. Enfin, tout $x \in E$ admet un symétrique, à savoir $\frac{1}{x} \in E$, car $x \oplus \frac{1}{x} = 1$. **Donc $(E, \oplus)$ est un groupe commutatif, de neutre 1, et le symétrique de x est $\frac{1}{x}$.**

b. La loi $\odot$ est bien à valeurs dans E , car $x^\lambda = e^{\lambda \ln x} > 0$. Soit $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On vérifie alors les quatre axiomes :

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) ;$$

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{\lambda + \mu} = x^\lambda x^\mu = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) ;$$

$$\lambda \odot (\mu \odot x) = (x^\mu)^\lambda = x^{\lambda \mu} = (\lambda \mu) \odot x ;$$

$$1 \odot x = x^1 = x .$$

Avec a), $(E, \oplus, \odot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, dont le « vecteur nul » est le réel 1 .

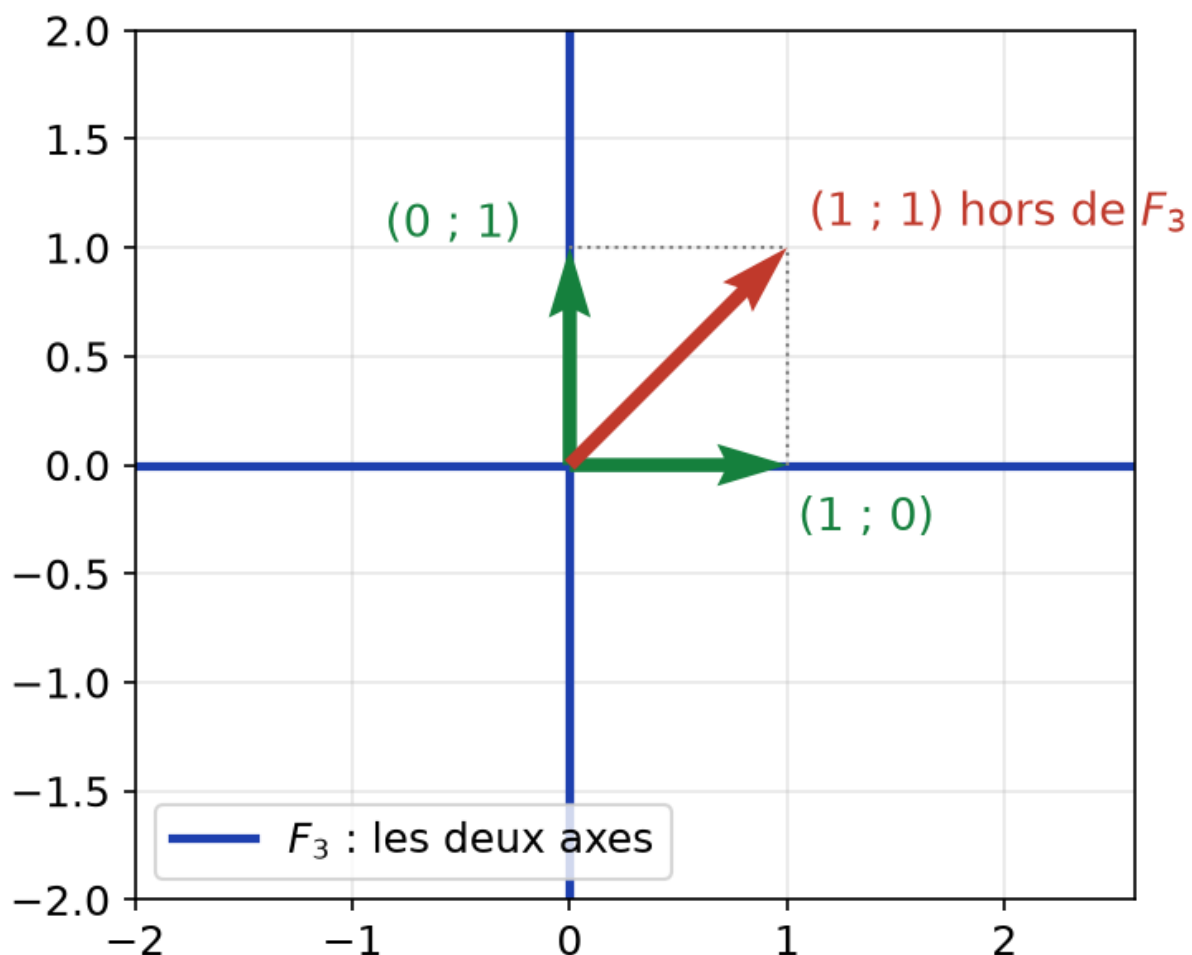
c. La loi $\lambda \cdot x = \lambda x$ n'est pas une loi externe sur E : par exemple $(-1) \cdot 2 = -2 \notin E$. **L'axiome de base « $\lambda \cdot x \in E$ » tombe, donc on n'obtient pas un espace vectoriel.** On peut aussi remarquer que $0 \cdot x = 0$ devrait être le neutre 1, ce qui est faux.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour loi interne, associativité et commutativité, 0,5 pour le neutre, 0,5 pour le

symétrique ; b) 2 points : 0,5 par axiome ; c) 0,5 point pour un contre-exemple explicite.

Exercice 3 : Sous-espaces vectoriels ou non (5 points)

- a. On a $0 + 2 \times 0 - 0 = 0$, donc $(0, 0, 0) \in F_1$. Soit $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ dans F_1 , et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
- $$(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') - (\lambda z + z') = \lambda(x + 2y - z) + (x' + 2y' - z') = 0.$$
- Donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.**
- b. Le vecteur nul vérifie $0 + 0 = 0 \neq 1$. F_2 ne contient pas $(0, 0, 0)$, ce n'est pas un sous-espace vectoriel.
- c. On a $(1, 0) \in F_3$ et $(0, 1) \in F_3$, car $1 \times 0 = 0$. Mais leur somme $(1, 1)$ vérifie $1 \times 1 = 1 \neq 0$. F_3 n'est pas stable par addition : ce n'est pas un sous-espace vectoriel. C'est la réunion des deux axes, comme dans l'exercice 1.
- d. Le polynôme nul vérifie les deux conditions, donc il appartient à F_4 . Soit $P, Q \in F_4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'une part, $(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = 0$. D'autre part, la dérivation est linéaire, donc $(\lambda P + Q)'(1) = \lambda P'(1) + Q'(1) = 0$. **Donc F_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.**
- e. La fonction nulle est solution de $f'' + f = 0$. Si $f, g \in F_5$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
- $$(\lambda f + g)'' + (\lambda f + g) = \lambda(f'' + f) + (g'' + g) = 0.$$
- F_5 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.** En revanche, la fonction nulle vérifie $0'' + 0 = 0 \neq 1$. **F_6 ne contient pas la fonction nulle : ce n'est pas un sous-espace vectoriel** (c'est un ensemble de solutions d'une équation non homogène).



Barème : 1 point par item : 0,5 pour la bonne réponse, 0,5 pour la justification (démonstration complète ou contre-exemple vérifié). Au e), 0,5 pour F_5 et 0,5 pour F_6 .

Exercice 4 : Sous-espace engendré et somme directe dans $\mathbb{R}^3$ **(4 points)**

a. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a les équivalences :

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow y = x + z \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, x + z, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 1, 1).$$

Ainsi tout vecteur de F est combinaison linéaire de $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$. Réciproquement, toute combinaison $x(1, 1, 0) + z(0, 1, 1)$ appartient à F par ces équivalences. **Donc**

$F = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$: c'est un plan vectoriel.

b. Soit $v \in F \cap G$. Comme $v \in G$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $v = (t, t, t)$. Or $v \in F$, donc $t - t + t = 0$, c'est-à-dire $t = 0$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$.

c. **Analyse.** Si $v = u + tw$ avec $u \in F$, alors $u = (x - t, y - t, z - t)$ doit vérifier l'équation de F :

$$(x - t) - (y - t) + (z - t) = 0, \text{ soit } t = x - y + z.$$

Le réel t est donc imposé, puis $u = v - tw$ l'est aussi : il y a unicité. **Synthèse.** Posons $t = x - y + z$ et $u = v - tw = (y - z, 2y - x - z, y - x)$. On vérifie que $(y - z) - (2y - x - z) + (y - x) = 0$, donc $u \in F$, et $v = u + tw$. **Tout vecteur s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :**
 $F \oplus G = \mathbb{R}^3$, les sous-espaces F et G sont supplémentaires. Pour $v = (2, 0, 1)$: $t = 2 - 0 + 1 = 3$ et $u = (-1, -3, -2)$. On contrôle que $-1 + 3 - 2 = 0$. Donc $(2, 0, 1) = (-1, -3, -2) + 3(1, 1, 1)$.

Barème : a) 1,5 point : 1 point pour l'équivalence, 0,5 pour la conclusion ; b) 1 point ; c) 1,5 point : 0,5 pour le calcul de t et l'unicité, 0,5 pour l'existence et la conclusion, 0,5 pour l'exemple numérique.

Exercice 5 : Problème : fonctions paires et fonctions impaires

(4 points)

a. La fonction nulle est paire. Si $f, g \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout réel x ,
 $(\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$. Donc $\lambda f + g \in \mathcal{P}$. De même, la fonction nulle est impaire, et si $f, g \in \mathcal{I}$, alors
 $(\lambda f + g)(-x) = -\lambda f(x) - g(x) = -(\lambda f + g)(x)$. **$\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E .**

b. Si f est à la fois paire et impaire, alors pour tout x , $f(x) = f(-x) = -f(x)$, donc $2f(x) = 0$ et $f(x) = 0$. Ainsi $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$.

c. **Analyse.** Supposons $f = p + i$ avec p paire et i impaire. Alors, pour tout x ,
 $f(x) = p(x) + i(x)$ et $f(-x) = p(x) - i(x)$. En additionnant puis en soustrayant, on obtient

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Synthèse. Définissons $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ par ces formules. On a $p(-x) = p(x)$, donc $p \in \mathcal{P}$, et $i(-x) = -i(x)$, donc $i \in \mathcal{I}$. Enfin $p + i = f$. Donc $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$. Avec b), $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$: **les fonctions paires et les fonctions impaires forment deux sous-espaces supplémentaires.**

d. Pour $f = \exp$: $p(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$ et $i(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$. Pour $f(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$: **la partie paire est $x \rightarrow x^2 + 1$ et la partie impaire $x \rightarrow 2x$** ; de même, $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$.

e. Soit $f \in E$. La fonction constante $c : x \rightarrow f(0)$ est paire, et $g = f - c$ vérifie $g(0) = 0$, donc $g \in \mathcal{G}$. Comme $f = c + g$, on a $\mathcal{P} + \mathcal{G} = E$. Cependant, la fonction $x \rightarrow x^2$ est paire, non nulle et s'annule en 0 : elle appartient à $\mathcal{P} \cap \mathcal{G}$. **Donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{G} \neq \{0\}$ et la somme $\mathcal{P} + \mathcal{G}$ n'est pas directe.**

Erreur fréquente : croire que $\mathcal{P} + \mathcal{G} = E$ suffit pour parler de supplémentaires ; il faut aussi une intersection réduite au vecteur nul.

Barème : a) 1 point (0,5 par sous-espace) ; b) 0,5 point ; c) 1,5 point : 0,5 pour l'analyse, 0,5 pour la synthèse, 0,5 pour la conclusion avec b) ; d) 0,5 point (0,25 par décomposition) ; e) 0,5 point (0,25 pour la somme, 0,25 pour le contre-exemple).

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : espaces vectoriels et sous-espaces

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Espaces vectoriels » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces vectoriels](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).