

Corrigé du contrôle de maths L1 : équations différentielles d'ordre 1 et 2

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours sur le premier ordre	3 points
Exercice 2 : Variation de la constante et problème de Cauchy	4 points
Exercice 3 : Raccordement de solutions en 0	4 points
Exercice 4 : Second ordre et principe de superposition	4 points
Exercice 5 : Problème : charge dans un circuit RLC	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours sur le premier ordre (3 points)

a.

La fonction a est continue sur l'intervalle I , donc elle admet une primitive A sur I , qui est de classe C^1 .

D'abord, la fonction $y_\lambda : x \rightarrow \lambda e^{-A(x)}$ est dérivable sur I . De plus, on a $y'_\lambda(x) = -\lambda a(x) e^{-A(x)} = -a(x) y_\lambda(x)$. Donc y_λ est solution de (H) .

Réciproquement, soit y une solution de (H) sur I . On pose $z(x) = y(x) e^{A(x)}$. Alors z est dérivable sur I et :

$$z'(x) = (y'(x) + a(x) y(x)) e^{A(x)} = 0.$$

Or I est un intervalle. Par conséquent, d'après le théorème des accroissements finis, z est constante sur I : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z = \lambda$. Ainsi $y(x) = \lambda e^{-A(x)}$ pour tout $x \in I$.

Les solutions de (H) sont les fonctions $x \rightarrow \lambda e^{-A(x)}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

b.

Soit y dérivable sur I . Par linéarité de la dérivation, on a pour tout $x \in I$:

$$(y - y_p)'(x) + a(x)(y - y_p)(x) = (y'(x) + a(x)y(x)) - b(x).$$

En effet, $y_p' + a y_p = b$. Donc le membre de gauche est nul si et seulement si $y' + a y = b$. **Ainsi y est solution de (E) si et seulement si $y - y_p$ est solution de (H) .** L'ensemble des solutions de (E) est donc une droite affine dirigée par $x \rightarrow e^{-A(x)}$.

Erreur fréquente : oublier de dire que I est un intervalle. Sur une réunion d'intervalles, une fonction de dérivée nulle n'est pas forcément constante.

Barème : a) 2 points : 0,5 point pour la vérification directe, 1 point pour le calcul de z' , 0,5 point pour la

conclusion justifiée par le caractère d'intervalle ; b) 1 point : 0,5 point pour le calcul, 0,5 point pour l'équivalence rédigée dans les deux sens.

Exercice 2 : Variation de la constante et problème de Cauchy (4 points)

a.

Ici $a(x) = 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$, de primitive $A(x) = x^2$. D'après le cours, **les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \rightarrow \lambda e^{-x^2}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.**

b.

Les fonctions $x \rightarrow 2x$ et $x \rightarrow \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. On cherche donc les solutions sous la forme $y(x) = \lambda(x) e^{-x^2}$, avec λ dérivable. Alors :

$$y'(x) + 2x y(x) = \lambda'(x) e^{-x^2} - 2x \lambda(x) e^{-x^2} + 2x \lambda(x) e^{-x^2} = \lambda'(x) e^{-x^2}.$$

Par conséquent, y est solution de (E_2) si et seulement si $\lambda'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout réel x . Autrement dit, $\lambda(x) = \arctan x + K$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E_2) sont les fonctions $x \rightarrow (\arctan x + K) e^{-x^2}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

c.

On a $f(0) = (\arctan 0 + K) e^0 = K$. Donc la condition $f(0) = 1$ donne $K = 1$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire assure l'unicité. **Ainsi $f(x) = (1 + \arctan x) e^{-x^2}$.**

Ensuite, pour tout réel x , $|1 + \arctan x| \leq 1 + \frac{\pi}{2}$. Donc $|f(x)| \leq \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)e^{-x^2}$, qui tend vers 0. **Par encadrement**, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Barème : a) 1 point ; b) 2 points : 0,5 point pour la forme cherchée, 1 point pour le calcul de λ' , 0,5 point pour la primitive et la conclusion ; c) 1 point : 0,5 point pour f , 0,5 point pour la limite justifiée.

Exercice 3 : Raccordement de solutions en 0 (4 points)

a.

Sur $]0, +\infty[$, $x \neq 0$: l'équation équivaut à $y' - \frac{2}{x}y = x^2$. Les coefficients sont continus sur cet intervalle.

D'abord, $-\frac{2}{x}$ a pour primitive $-2\ln x$. Donc les solutions homogènes sont $x \rightarrow \lambda e^{2\ln x} = \lambda x^2$.

Ensuite, on pose $y(x) = \lambda(x) x^2$. Alors

$x y'(x) - 2y(x) = \lambda'(x) x^3 + 2\lambda(x) x^2 - 2\lambda(x) x^2 = \lambda'(x) x^3$. Ainsi y est solution si et seulement si $\lambda'(x) = 1$, soit $\lambda(x) = x + C_1$.

Sur $]0, +\infty[$, les solutions sont $x \rightarrow x^3 + C_1 x^2$, avec $C_1 \in \mathbb{R}$.

b.

Sur $] -\infty, 0[$, une primitive de $-\frac{2}{x}$ est $-2\ln|x|$. Or $e^{2\ln|x|} = x^2$. Le calcul de variation de la constante est donc identique. **Les solutions sont $x \rightarrow x^3 + C_2 x^2$, avec $C_2 \in \mathbb{R}$.**

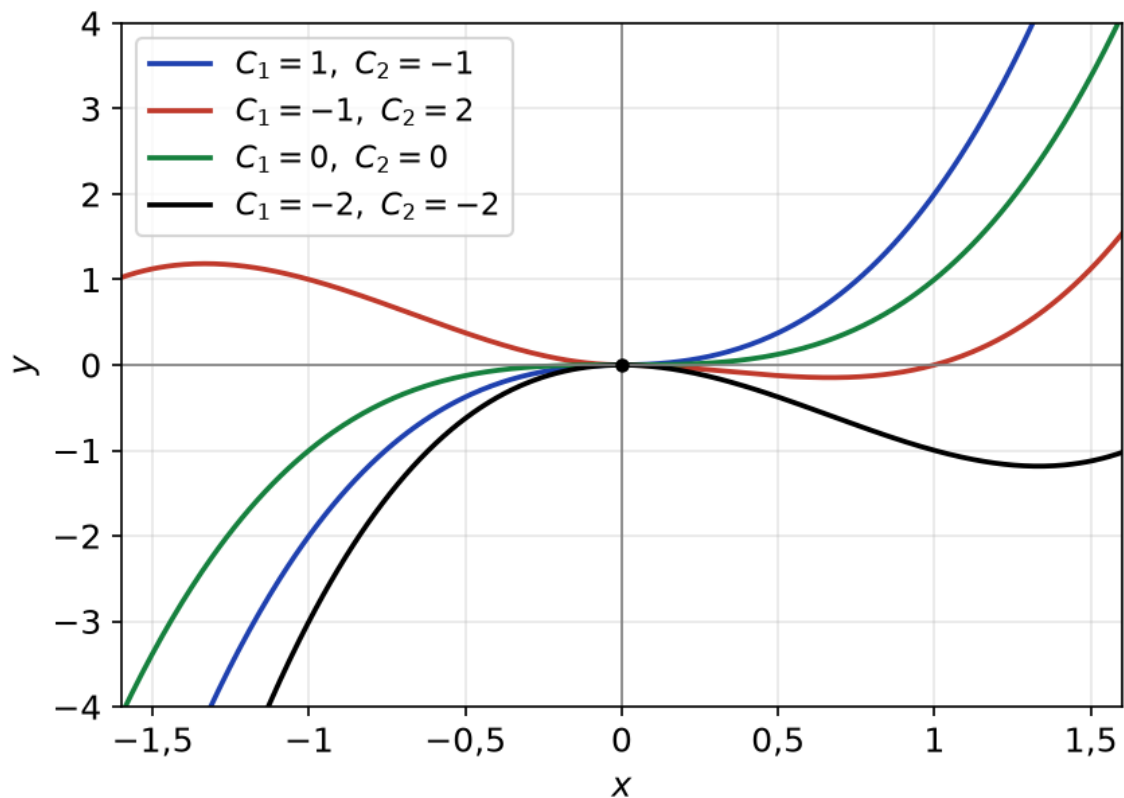
c.

Analyse. Soit y dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de (E_3) sur $\mathbb{R}$. Ses restrictions sont solutions sur chacun des deux intervalles. Il existe donc C_1 et C_2 tels que $y(x) = x^3 + C_1 x^2$ si $x > 0$ et $y(x) = x^3 + C_2 x^2$ si $x < 0$. De plus, l'équation en $x = 0$ donne $0 \times y'(0) - 2y(0) = 0$, donc $y(0) = 0$.

Synthèse. Soient C_1, C_2 réels et y définie ainsi, avec $y(0) = 0$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En 0, pour $x > 0$, on a $\frac{y(x) - y(0)}{x} = x^2 + C_1 x$, qui tend vers 0. De même, pour $x < 0$, le taux vaut $x^2 + C_2 x$, qui tend aussi vers 0. Donc y est dérivable en 0 et $y'(0) = 0$. Enfin, l'équation est vérifiée en 0 car $0 \times 0 - 2 \times 0 = 0^3$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions égales à $x^3 + C_1 x^2$ sur $[0, +\infty[$ et à $x^3 + C_2 x^2$ sur $] -\infty, 0]$, avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ quelconque.

L'ensemble des solutions est un plan affine (dimension 2), et non une droite. Cela ne contredit pas le cours : le coefficient de y' s'annule en 0, donc l'équation n'est pas résolue sur $\mathbb{R}$. Enfin, toute solution vérifie $y(0) = 0$. **Le problème de Cauchy $y(0) = 1$ n'a donc aucune solution sur $\mathbb{R}$.**



Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour la mise sous forme résolue, 1 point pour la variation de la constante ;
 b) 0,5 point ; c) 2 points : 0,5 point pour l'analyse, 0,5 point pour la dérivabilité en 0, 0,5 point pour la conclusion, 0,5 point pour la dimension et le problème de Cauchy.

Exercice 4 : Second ordre et principe de superposition (4 points)

a.

L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$, soit $(r-1)(r-2) = 0$. Elle a deux racines réelles distinctes, 1 et 2. **Les solutions de (H_4) sont les fonctions $x \rightarrow A e^x + B e^{2x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.**

b.

Soit $y(x) = P(x)e^x$ avec P polynôme. Alors $y' = (P + P')e^x$ et $y'' = (P + 2P' + P'')e^x$. Donc :

$$y'' - 3y' + 2y = (P + 2P' + P'' - 3P - 3P' + 2P)e^x = (P'' - P')e^x.$$

On cherche donc P tel que $P'' - P' = x$. Comme 1 est racine simple, on prend $P(x) = ax^2 + bx$. Alors $P'' - P' = 2a - 2ax - b$. Par identification, $-2a = 1$ et $2a - b = 0$, donc $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -1$.

Vérification : avec $P(x) = -\frac{x^2}{2} - x$, on a $P'(x) = -x - 1$ et $P''(x) = -1$, donc $P'' - P' = x$. **Une solution particulière est** $y_1(x) = -\left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x$.

c.

Le nombre i n'est pas racine de l'équation caractéristique. On cherche donc $y(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$. Alors $y'' - 3y' + 2y = (\alpha - 3\beta)\cos x + (3\alpha + \beta)\sin x$.

Par identification, $\alpha - 3\beta = 0$ et $3\alpha + \beta = 10$. Ainsi $\alpha = 3\beta$, puis $10\beta = 10$: $\beta = 1$ et $\alpha = 3$. **Une solution particulière est** $y_2(x) = 3\cos x + \sin x$.

d.

D'après le principe de superposition, $y_1 + y_2$ est solution de l'équation complète. Ensuite, la structure affine des solutions donne le résultat. **Les solutions sont les fonctions**

$$x \rightarrow A e^x + B e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x + 3\cos x + \sin x, \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Erreur fréquente : chercher P de degré 1 en b. Comme 1 est racine simple, le degré doit augmenter de 1.

Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point : 0,5 point pour le calcul de $y'' - 3y' + 2y$, 1 point pour P ; c) 1 point : 0,5 point pour le système, 0,5 point pour le résultat ; d) 0,5 point.

Exercice 5 : Problème : charge dans un circuit RLC (5 points)

a.

Avec $L = 1$, $R = 2$ et $\frac{1}{C} = \frac{1}{0,2} = 5$, l'équation devient $q'' + 2q' + 5q = 10$. **La charge q est solution de $q'' + 2q' + 5q = 10$.**

b.

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 5 = 0$. Son discriminant vaut $4 - 20 = -16 = (4i)^2$. Ses racines sont donc $r = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$.

Les solutions réelles sont les fonctions $t \rightarrow e^{-t}(\alpha \cos(2t) + \beta \sin(2t))$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

c.

La fonction constante égale à 2 convient, car $5 \times 2 = 10$. **La solution générale est $q(t) = 2 + e^{-t}(\alpha \cos(2t) + \beta \sin(2t))$.**

d.

D'abord, $q(0) = 2 + \alpha = 0$, donc $\alpha = -2$. Ensuite, on dérive :

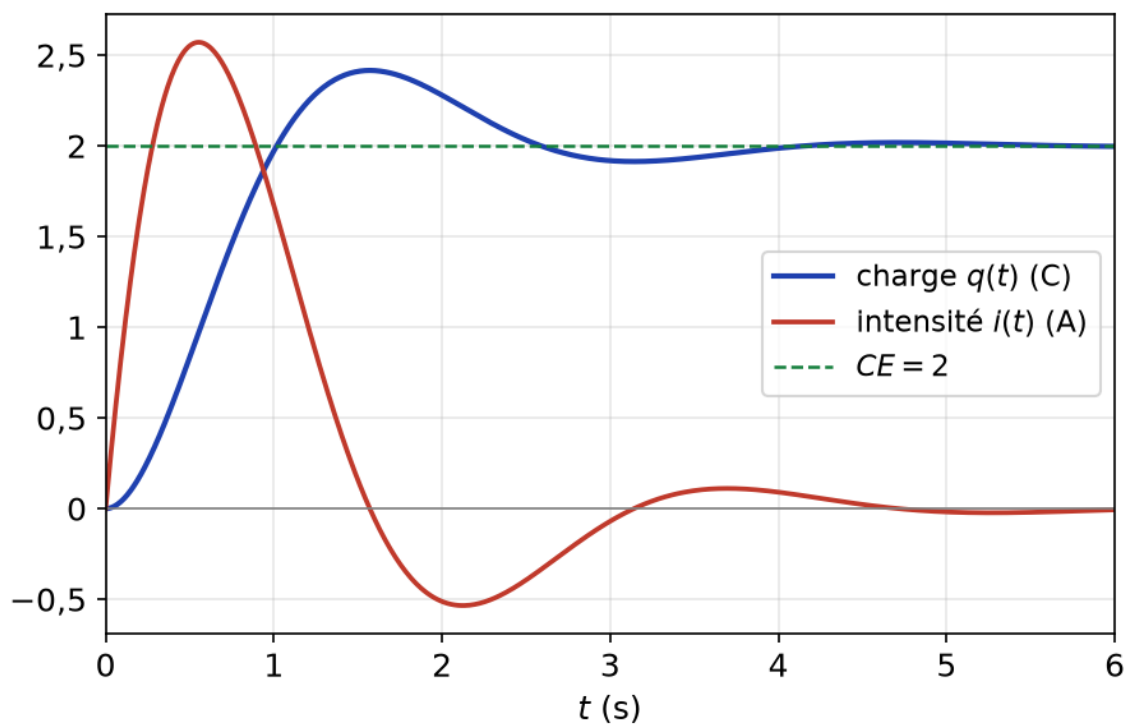
$$q'(t) = e^{-t}((2\beta - \alpha)\cos(2t) - (2\alpha + \beta)\sin(2t)).$$

Ainsi $q'(0) = 2\beta - \alpha = 2\beta + 2 = 0$, donc $\beta = -1$. Le problème de Cauchy a une unique solution. **Pour** $t \geq 0$, $q(t) = 2 - e^{-t}(2\cos(2t) + \sin(2t))$.

e.

Avec $\alpha = -2$ et $\beta = -1$, on a $2\beta - \alpha = 0$ et $-(2\alpha + \beta) = 5$. **Donc**
 $i(t) = 5e^{-t}\sin(2t)$.

Ensuite, $|2\cos(2t) + \sin(2t)| \leq 3$, donc $|q(t) - 2| \leq 3e^{-t}$, qui tend vers 0. **Ainsi**
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 2$ **c.** On retrouve $C \times E = 0,2 \times 10 = 2$: le condensateur finit chargé sous la tension du générateur. Le régime est pseudo-périodique, de pseudo-période π s.



Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 0,5 point pour les racines, 1 point pour les solutions réelles ; c) 0,5 point ; d) 1,5 point : 0,5 point pour α , 0,5 point pour la dérivée, 0,5 point pour β ; e) 1 point : 0,5 point pour $i(t)$, 0,5 point pour la limite et son interprétation.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : équations différentielles d'ordre 1 et 2

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Équations différentielles](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [équations différentielles](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : intégrales, équations différentielles et DL](#)