

Corrigé du contrôle de maths L1 : déterminants, Cramer et Vandermonde

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : déterminant et inversibilité	3 points
Exercice 2 : Signature d'une permutation	3 points
Exercice 3 : Calculs de déterminants	4 points
Exercice 4 : Système de Cramer et comatrice	4 points
Exercice 5 : Problème : déterminant tridiagonal et Vandermonde	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : déterminant et inversibilité (3 points)

a. **Caractérisation.** Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

b. Supposons A inversible. Alors $AA^{-1} = I_n$, et la multiplicativité du déterminant donne

$$\det(A) \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1.$$

Le produit de deux scalaires vaut 1, donc aucun des deux n'est nul. **Ainsi** $\det A \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

- c. Supposons A non inversible, et notons $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes. La matrice n'est pas inversible, donc son rang est strictement inférieur à n et la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est liée. L'une des colonnes, disons C_j , est donc combinaison linéaire des autres : $C_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k C_k$. Par linéarité du déterminant par rapport à la j -ième colonne :

$$\det A = \sum_{k \neq j} \lambda_k \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_k, C_{j+1}, \dots, C_n).$$

Chaque déterminant de cette somme possède deux colonnes égales (en positions j et k). Il est donc nul, car le déterminant est alterné. **Par conséquent** $\det A = 0$. Par contraposée, on obtient le sens réciproque de la caractérisation.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point : 0,5 pour l'argument, 0,5 pour la formule de l'inverse ; c) 1,5 point : 0,5 pour la famille liée, 0,5 pour la linéarité, 0,5 pour le caractère alterné.

Exercice 2 : Signature d'une permutation (3 points)

- a. On suit les orbites. Partant de 1 : $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Partant de 2 : $2 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 2$. Tous les éléments sont atteints. **Donc** $\sigma = (1\ 4\ 3)(2\ 6\ 5)$, produit de deux 3-cycles à supports disjoints.
- b. Pour un 3-cycle, $(a\ b\ c) = (a\ b)(b\ c)$, la composition se lisant de droite à gauche. En effet, $(b\ c)$ fixe a , puis $(a\ b)$ l'envoie sur b ; b est envoyé sur c , que $(a\ b)$ fixe ; enfin c est envoyé sur b , puis sur a . **Ainsi** $\sigma = (1\ 4)(4\ 3)(2\ 6)(6\ 5)$.
- c. La signature est un morphisme de groupes et vaut -1 sur toute transposition. Donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^4 = 1$. Contrôle par les inversions : la liste des images est $(4, 6, 1, 3, 2, 5)$. Le 4 est suivi de 1, 3, 2, plus petits : 3 inversions. Le 6 est suivi de 1, 3, 2, 5 : 4 inversions. Ensuite, le 1 n'en donne aucune, le 3 en donne une (avec 2) et le 2 aucune. On trouve au total $3 + 4 + 1 = 8$ inversions, nombre pair. **Donc** $\varepsilon(\sigma) = 1$: σ est une permutation paire.

Barème : a) 1 point ; b) 1 point : 0,5 pour la décomposition, 0,5 pour la justification ; c) 1 point : 0,5 pour la signature, 0,5 pour le contrôle par les inversions.

Exercice 3 : Calculs de déterminants (4 points)

a. On développe selon la première ligne :

$$D_1 = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1 - 4) - (1 - 6) + 3(2 + 3).$$

Ainsi $D_1 = -10 + 5 + 15$. **Donc** $D_1 = 10$.

b. L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ ne change pas le déterminant, et donne une première colonne égale à $(m + 2, m + 2, m + 2)$. Par linéarité selon cette colonne :

$$\det M(m) = (m + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}.$$

Ensuite, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ rendent la matrice triangulaire :

$$\det M(m) = (m + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m + 2)(m - 1)^2.$$

La matrice $M(m)$ est inversible si et seulement si $m \neq 1$ et $m \neq -2$.

c. Le déterminant est 3-linéaire, donc multiplier les trois colonnes par 2 multiplie le déterminant par 2^3 : $\det(2A) = 8 \times 3 = 24$. D'après l'exercice 1, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{3}$. Enfin, avec $\det(A^T) = \det A$ et la multiplicativité, $\det(A^T A^2) = 3 \times 3^2 = 27$.

Erreur fréquente : écrire $\det(2A) = 2 \det A$. Le facteur 2 sort une fois par colonne, soit 2^n en taille n .

Barème : a) 1 point ; b) 1,5 point : 1 point pour le calcul par opérations, 0,5 pour la condition d'inversibilité ; c) 1,5 point : 0,5 par déterminant.

Exercice 4 : Système de Cramer et comatrice (4 points)

a. En développant selon la première ligne,

$$\det A = 1(1 \times 2 - 1 \times 0) - 2(0 \times 2 - 1 \times 1) + 1(0 \times 0 - 1 \times 1) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Comme $\det A = 3 \neq 0$, le système (S) est un système de Cramer : il admet une unique solution.

- b. D'après les formules de Cramer, chaque inconnue est le quotient par $\det A$ du déterminant obtenu en remplaçant la colonne correspondante par B :

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8(2 - 0) - 2(10 - 7) + 1(0 - 7) = 16 - 6 - 7 = 3,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 1(10 - 7) - 8(0 - 1) + 1(0 - 5) = 3 + 8 - 5 = 6,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1(7 - 0) - 2(0 - 5) + 8(0 - 1) = 7 + 10 - 8 = 9.$$

Donc $x = \frac{3}{3} = 1$, $y = \frac{6}{3} = 2$ et $z = \frac{9}{3} = 3$. Vérification : $1 + 4 + 3 = 8$,
 $2 + 3 = 5$ et $1 + 6 = 7$. **L'unique solution est $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.**

- c. Les cofacteurs sont $C_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$, où m_{ij} est le mineur obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j . Par exemple, $C_{11} = 2$, $C_{12} = -(0 - 1) = 1$ et $C_{21} = -(4 - 0) = -4$. On obtient :

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}(A)^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification : la première ligne de A , soit $(1, 2, 1)$, donne avec les colonnes de $\text{Com}(A)^T$ les produits $2 + 2 - 1 = 3$, $-4 + 2 + 2 = 0$ et $1 - 2 + 1 = 0$. Les autres lignes se vérifient de même. **Ainsi $A \text{Com}(A)^T = 3 I_3$.**

- d. On calcule

$$A^{-1} B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 16 - 20 + 7 \\ 8 + 7 \\ -8 + 10 + 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On retrouve $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 0,5 par inconnue ; c) 1,5 point : 1 point pour la comatrice, 0,5 pour l'inverse ; d) 0,5 point.

Exercice 5 : Problème : déterminant tridiagonal et Vandermonde (6 points)

Partie A : le déterminant tridiagonal

- a. Soit $n \geq 3$. La première ligne de Δ_n est $(5, 2, 0, \dots, 0)$. En développant selon cette ligne :

$$\Delta_n = 5 \Delta_{n-1} - 2 \delta_{n-1},$$

où δ_{n-1} est le mineur obtenu en supprimant la ligne 1 et la colonne 2. Le signe $-$ vient du facteur $(-1)^{1+2}$. La première colonne de ce mineur est $(2, 0, \dots, 0)$, et en supprimant sa première ligne et sa première colonne on retrouve Δ_{n-2} . En développant selon cette colonne, $\delta_{n-1} = 2 \Delta_{n-2}$. **Donc** $\Delta_n = 5 \Delta_{n-1} - 4 \Delta_{n-2}$ **pour tout** $n \geq 3$.

- b. On a $\Delta_1 = 5$ et $\Delta_2 = 5 \times 5 - 2 \times 2 = 21$. La suite vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2 - 5r + 4 = 0$, dont les racines sont 1 et 4. Il existe donc des réels α et β tels que $\Delta_n = \alpha 4^n + \beta$ pour tout $n \geq 1$. Les conditions $4\alpha + \beta = 5$ et $16\alpha + \beta = 21$ donnent $12\alpha = 16$, soit $\alpha = \frac{4}{3}$, puis $\beta = 5 - \frac{16}{3} = -\frac{1}{3}$. **Ainsi** $\Delta_n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$ **pour tout** $n \geq 1$. Contrôle : $\Delta_3 = 5 \times 21 - 4 \times 5 = 85$, et $\frac{4^4 - 1}{3} = \frac{255}{3} = 85$.

Partie B : le déterminant de Vandermonde

- c. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ ne changent pas le déterminant :

$$V(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b - a & b^2 - a^2 \\ 0 & c - a & c^2 - a^2 \end{vmatrix}.$$

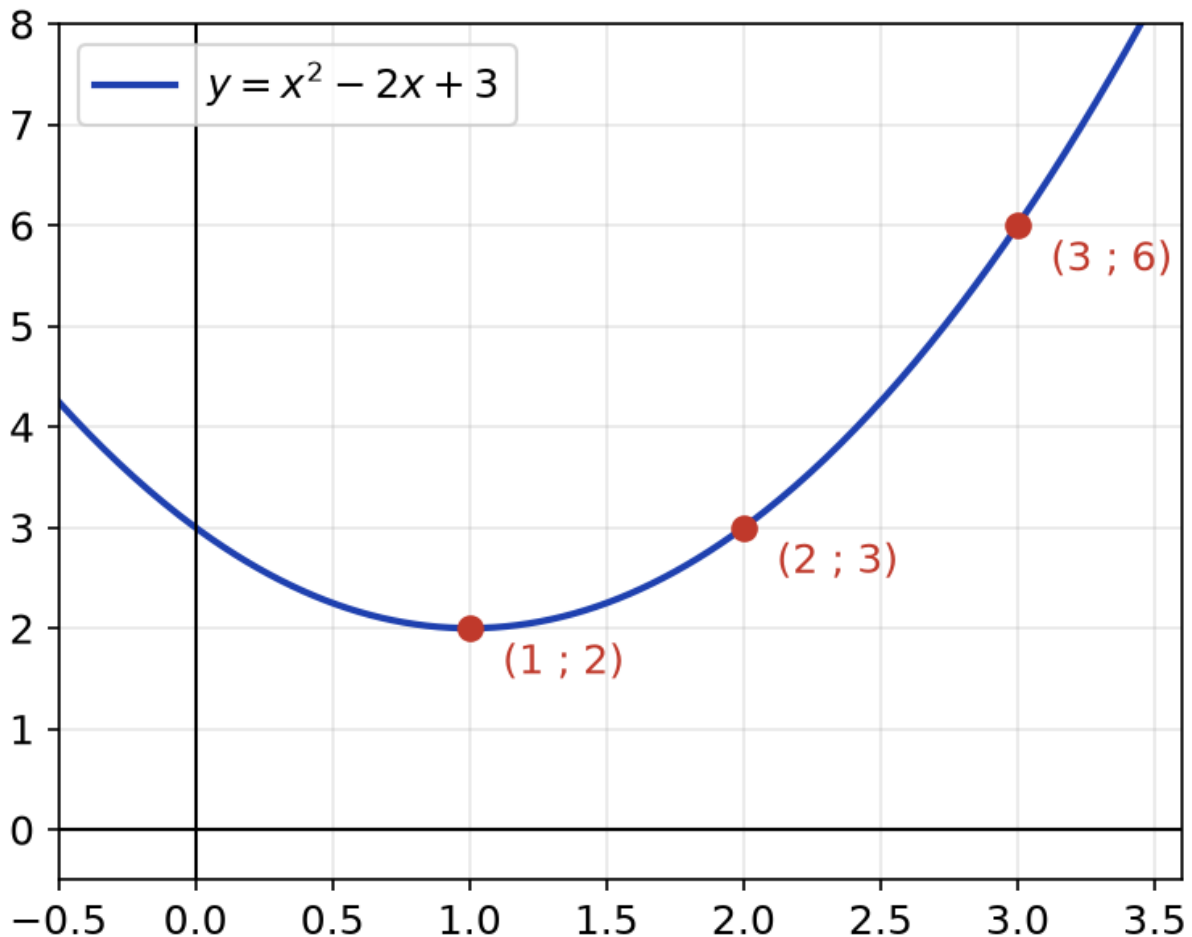
En développant selon la première colonne, puis en factorisant $b - a$ et $c - a$:

$$V(a, b, c) = (b - a)(c - a) \begin{vmatrix} 1 & b + a \\ 1 & c + a \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)((c + a) - (b + a)).$$

Donc $V(a, b, c) = (b - a)(c - a)(c - b)$.

- d. Les conditions s'écrivent $u + v + w = 2$, $u + 2v + 4w = 3$ et $u + 3v + 9w = 6$. La matrice de ce système est celle de $V(1, 2, 3)$, et

$V(1, 2, 3) = (2 - 1)(3 - 1)(3 - 2) = 2 \neq 0$. C'est donc un système de Cramer : il existe un unique polynôme P qui convient. Pour le trouver, on soustrait les équations deux à deux : $v + 3w = 1$ et $v + 5w = 3$. On en tire $2w = 2$, donc $w = 1$, puis $v = -2$ et $u = 2 + 2 - 1 = 3$. Vérification : $P(1) = 2$, $P(2) = 4 - 4 + 3 = 3$ et $P(3) = 9 - 6 + 3 = 6$. Donc $P = X^2 - 2X + 3$.



Barème : a) 1,5 point : 0,5 pour le développement, 0,5 pour le mineur, 0,5 pour le signe et la conclusion ; b) 1,5 point : 0,5 pour les valeurs initiales, 0,5 pour l'équation caractéristique, 0,5 pour la formule ; c) 1,5 point : 0,5 pour les opérations, 1 point pour la factorisation ; d) 1,5 point : 0,5 pour l'unicité via Vandermonde, 1 point pour le calcul de P .

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : déterminants, Cramer et Vandermonde

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Déterminants](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [déterminants](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).