

Corrigé du contrôle de maths L1 : dérivation, Rolle et accroissements finis

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Théorème de Rolle et accroissements finis	4 points
Exercice 2 : Dérivabilité et formule de Leibniz	5 points
Exercice 3 : Théorème de Rolle et racines	4 points
Exercice 4 : Accroissements finis et logarithme	7 points
Total	20 points

Exercice 1 : Théorème de Rolle et accroissements finis (4 points)

- a. Supposons que f admette un maximum local en c (le cas du minimum s'obtient en remplaçant f par $-f$). Comme c est intérieur à I , il existe $\eta > 0$ tel que $]c - \eta, c + \eta[\subset I$ et $f(x) \leq f(c)$ pour tout x de cet intervalle.

Pour $c < x < c + \eta$, le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ est négatif ou nul ; en passant à la limite à droite, $f'(c) \leq 0$. Pour $c - \eta < x < c$, ce taux est positif ou nul ; en passant à la limite à gauche, $f'(c) \geq 0$. **Donc** $f'(c) = 0$.

- b. **Théorème de Rolle** : si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$: d'après le théorème des bornes atteintes, elle admet un minimum m et un maximum M . Si $m = M$, f est constante et tout $c \in]a, b[$ convient. Sinon, l'une des valeurs m ou M diffère de $f(a) = f(b)$; elle est donc atteinte en un point c de $]a, b[$, intérieur. Cet extremum est en particulier local et f est dérivable en c , donc $f'(c) = 0$ par la question a).

c. Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On pose

$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. La fonction ψ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $\psi(a) = \psi(b) = 0$. Le théorème de Rolle fournit $c \in]a, b[$ tel que $\psi'(c) = 0$, c'est-à-dire $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour le voisinage, 1 point pour les deux limites de taux d'accroissement ; b) 1,5 point : 0,5 point pour l'énoncé, 1 point pour la preuve (bornes atteintes, point intérieur) ; c) 1 point : 0,5 point pour ψ , 0,5 point pour la vérification des hypothèses.

Exercice 2 : Dérivabilité et formule de Leibniz (5 points)

a. Pour $x \neq 0$, $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$. Par le théorème des gendarmes, le taux d'accroissement tend vers 0. **Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.**

b. Sur $\mathbb{R}^*$, f est un produit et une composée de fonctions dérivables. Comme la dérivée de $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est $x \rightarrow -\frac{1}{x^2}$:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

c. Supposons f' continue en 0 : $f'(x)$ tendrait vers 0. Comme $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0, on aurait $\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - f'(x) \rightarrow 0$. Or la suite $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ tend vers 0 et $\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1$ pour tout n : c'est une contradiction. **La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas de classe C^1 .**

d. Posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^{2x}$. On a $u'(x) = 2x$, $u''(x) = 2$ et $u^{(k)} = 0$ pour

$k \geq 3$; de plus $v^{(j)}(x) = 2^j e^{2x}$. Les fonctions u et v sont de classe C^∞ et la formule de Leibniz donne, pour $n \geq 2$:

$$g^{(n)}(x) = \binom{n}{0} x^2 2^n e^{2x} + \binom{n}{1} 2x 2^{n-1} e^{2x} + \binom{n}{2} 2 \times 2^{n-2} e^{2x}.$$

Avec $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, on factorise par $2^{n-2} e^{2x}$:

$$g^{(n)}(x) = 2^{n-2} e^{2x} (4x^2 + n \times 2x \times 2 + n(n-1)) = 2^{n-2} e^{2x} (4x^2 + 4nx + n(n-1)).$$

En $x = 0$: $g^{(n)}(0) = 2^{n-2} n(n-1)$. Par exemple $g''(0) = 2$, ce qui se vérifie directement.

Erreur fréquente : déduire $f'(0)$ de la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 0 . Cette limite n'existe pas, et pourtant f est dérivable en 0 : il faut revenir au taux d'accroissement.

Barème : a) 1 point ; b) 0,5 point ; c) 1 point : 0,5 point pour la suite, 0,5 point pour la conclusion sur la classe ; d) 2,5 points : 0,5 point pour les dérivées de u et v , 1 point pour la formule de Leibniz correctement écrite, 0,5 point pour la factorisation, 0,5 point pour $g^{(n)}(0)$.

Exercice 3 : Théorème de Rolle et racines (4 points)

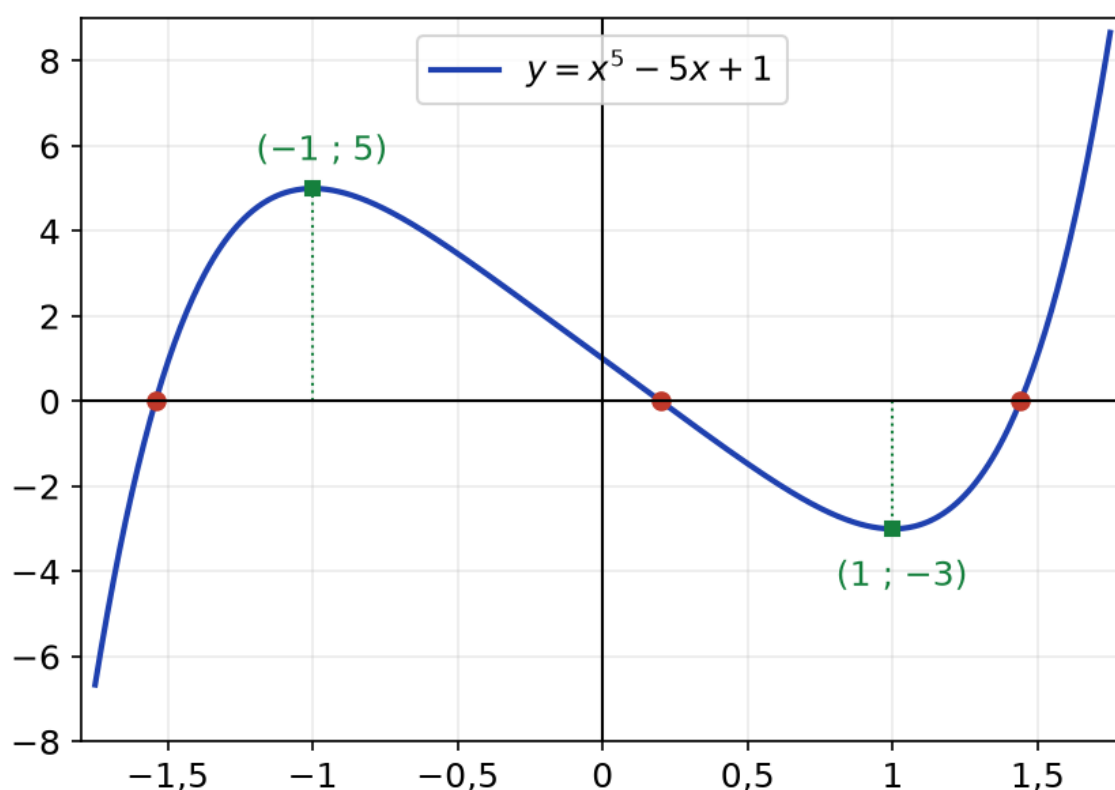
- a. *Au plus trois racines.* On a $P'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2 - 1)(x^2 + 1)$, qui ne s'annule qu'en -1 et 1 . Si P avait quatre racines $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, le théorème de Rolle appliqué à P (continue et dérivable) sur $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ et $[x_3, x_4]$ donnerait trois racines distinctes de P' , situées dans des intervalles ouverts disjoints. C'est impossible, donc P a au plus trois racines réelles.

Au moins trois racines. On calcule $P(-2) = -32 + 10 + 1 = -21$,

$P(-1) = -1 + 5 + 1 = 5$, $P(1) = 1 - 5 + 1 = -3$ et $P(2) = 32 - 10 + 1 = 23$.

La fonction P est continue et change de signe sur $[-2, -1]$, sur $[0, 1]$ (car $P(0) = 1$) et sur $[1, 2]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule dans chacun de ces trois intervalles.

Le polynôme P a exactement trois racines réelles, situées dans $]-2, -1[$, $]0, 1[$ et $]1, 2[$.



b. Soit $H(n)$ la propriété de l'énoncé.

Initialisation. Pour $n = 1$, f s'annule en $x_0 < x_1$: le théorème de Rolle sur $[x_0, x_1]$ donne un zéro de f' .

Hérédité. Supposons $H(n)$ vraie et soit f dérivable $n+1$ fois qui s'annule en $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$. Le théorème de Rolle sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$ fournit $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ avec $f'(c_i) = 0$, pour $0 \leq i \leq n$. Ces $n+1$ points sont distincts car les intervalles ouverts sont disjoints. La fonction f' est n fois dérivable et s'annule en $n+1$ points : par $H(n)$, $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ s'annule. **La propriété est vraie pour tout $n \geq 1$**

- c. On pose $f(x) = e^x - ax^2 - bx - c$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a $f^{(3)}(x) = e^x > 0$, donc $f^{(3)}$ ne s'annule jamais. Si l'équation avait quatre solutions distinctes, f s'annulerait en quatre points et, par la question b) avec $n = 3$, $f^{(3)}$ s'annulerait. **L'équation admet donc au plus trois solutions réelles.**

Barème : a) 2 points : 1 point pour la majoration par Rolle, 1 point pour les trois changements de signe et le théorème des valeurs intermédiaires ; b) 1 point : 0,5 point pour l'initialisation, 0,5 point pour l'hérédité avec des zéros distincts ; c) 1 point : 0,5 point pour $f^{(3)} > 0$, 0,5 point pour la conclusion.

Exercice 4 : Accroissements finis et logarithme (7 points)

- a. La fonction φ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, avec $\varphi'(t) = \frac{1}{1+t}$. L'égalité des accroissements finis donne $c \in]0, x[$ tel que

$$\ln(1+x) - \ln 1 = \frac{x}{1+c}.$$

Comme $0 < c < x$, on a $1 < 1+c < 1+x$, donc $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$. En multipliant par $x > 0$: $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

- b. Avec $x = \frac{1}{n}$, on a $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{n+1}$, donc $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$. En multipliant par n : $\frac{n}{n+1} < n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$. Par le théorème des gendarmes, $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ **tend vers** 1.

Or $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ et la fonction exponentielle est continue en 1. **Donc** $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ **tend vers** e .

- c. La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - (1+x) + x(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0.$$

Donc h est croissante sur $[0, +\infty[$ et $h(x) \geq h(0) = 0$, c'est-à-dire $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

Pour $x = 0,1$: $0,1 - 0,005 \leq \ln(1,1) < 0,1$ d'après a). **Ainsi** $0,095 \leq \ln(1,1) < 0,1$, encadrement d'amplitude $0,005$.

d. La tangente en C est parallèle à (AB) si et seulement si $\varphi'(c) = \frac{\ln 4 - 0}{3 - 0}$, soit $\frac{1}{1+c} = \frac{\ln 4}{3}$. **Donc** $c = \frac{3}{\ln 4} - 1$.

On a $c > 0$ si et seulement si $\ln 4 < 3$, c'est-à-dire $4 < e^3$, vrai car $e^3 > 2^3 = 8$. On a $c < 3$ si et seulement si $\frac{3}{\ln 4} < 4$, soit $\ln 4 > \frac{3}{4}$, c'est-à-dire $e^{3/4} < 4$, vrai car $e^{3/4} < e < 4$. **Donc** $0 < c < 3$, comme l'annonce l'égalité des accroissements finis (numériquement, $c \approx 1,16$).

e. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $|\sin'(t)| = |\cos t| \leq 1$. L'inégalité des accroissements finis donne, pour tous x et y : $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$. Avec $y = 0$: $|\sin x| \leq |x|$.

Barème : a) 2 points : 0,5 point pour les hypothèses, 0,5 point pour l'égalité des accroissements finis, 1 point pour l'encadrement ; b) 1,5 point : 1 point pour les gendarmes, 0,5 point pour la continuité de l'exponentielle ; c) 1,5 point : 1 point pour h' et le signe, 0,5 point pour l'encadrement de $\ln(1,1)$; d) 1 point : 0,5 point pour c , 0,5 point pour $0 < c < 3$; e) 1 point.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : dérivation, Rolle et accroissements finis

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Dérivation » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [dérivation](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : suites, continuité et dérivation](#)