

Corrigé du contrôle de maths L1 : complexes, racines n-ièmes et trigonométrie

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : racines n-ièmes de l'unité	4 points
Exercice 2 : Formules de Moivre et d'Euler	5 points
Exercice 3 : Équations dans $\mathbb{C}$	5 points
Exercice 4 : Problème : pentagone régulier et cosinus de 2π sur 5	6 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : racines n-ièmes de l'unité (4 points)

- a. Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Alors $z \neq 0$, et on écrit $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. L'égalité $z^n = 1$ s'écrit $r^n e^{in\theta} = 1 \cdot e^{i0}$. Par unicité de la forme exponentielle, $r^n = 1$, donc $r = 1$ car $r > 0$. De plus, $n\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$: il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{2m\pi}{n}$.

Par division euclidienne, $m = qn + k$ avec $0 \leq k \leq n-1$. Alors

$$e^{2im\pi/n} = e^{2iq\pi} e^{2ik\pi/n} = e^{2ik\pi/n}. \text{ Réciproquement, } \left(e^{2ik\pi/n}\right)^n = e^{2ik\pi} = 1.$$

Enfin, si $0 \leq k < l \leq n-1$, les arguments $\frac{2k\pi}{n}$ et $\frac{2l\pi}{n}$ diffèrent de $\frac{2(l-k)\pi}{n} \in]0, 2\pi[$, qui n'est pas multiple de 2π . **Donc $\mathbb{U}_n$ contient exactement les n nombres distincts $e^{2ik\pi/n}$, $0 \leq k \leq n-1$.**

- b. Posons $\omega_1 = e^{2i\pi/n}$; les éléments de $\mathbb{U}_n$ sont les ω_1^k . Comme $n \geq 2$, $\omega_1 \neq 1$, et la somme géométrique donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^k = \frac{1 - \omega_1^n}{1 - \omega_1} = \frac{1 - 1}{1 - \omega_1} = 0.$$

La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

- c. On a $|z + z'|^2 = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')$. Or $\operatorname{Re}(w) \leq |w|$ pour tout complexe w , et $|z\bar{z}'| = |z||z'|$.

Donc $|z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$. **Les deux membres étant positifs, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.**

Barème : a) 0,5 point pour le module, 0,5 point pour l'argument, 0,5 point pour la réduction à k entre 0 et $n-1$, 0,5 point pour le caractère distinct ; b) 0,5 point pour la raison différente de 1, 0,5 point pour le calcul ; c) 0,5 point pour le développement, 0,5 point pour la majoration.

Exercice 2 : Formules de Moivre et d'Euler (5 points)

- a. D'après la formule d'Euler, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$. Par la formule du binôme :

$$\cos^3 x = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} = \frac{2\cos(3x) + 6\cos x}{8}.$$

Donc $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x.$

- b. D'après la formule de Moivre, $\cos(3x) = \operatorname{Re}((\cos x + i\sin x)^3)$. En développant, la partie réelle vaut $\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$. Ensuite, on remplace $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$.

On obtient $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$, ce qui est cohérent avec la question a).

- c. On a $1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}.$

Si $\theta \in]-\pi, \pi[$, alors $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos\frac{\theta}{2} > 0$. L'écriture obtenue est donc une forme exponentielle. **Le module vaut** $2\cos\frac{\theta}{2}$ **et un argument est** $\frac{\theta}{2}$.

- d. La somme cherchée est la partie réelle de $\sum_{k=0}^n e^{ikx}$. Comme $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{ix} \neq 1$. On factorise alors numérateur et dénominateur par l'angle moitié :

$$\sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(n+1)x/2} \times 2i\sin\frac{(n+1)x}{2}}{e^{ix/2} \times 2i\sin\frac{x}{2}} = e^{inx/2} \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

En prenant la partie réelle : $\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \frac{\cos\frac{nx}{2} \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$. Pour $n = 1$, on retrouve bien $1 + \cos x$.

Barème : a) 0,5 point pour Euler, 0,5 point pour le développement, 0,5 point pour le résultat ; b) 0,5 point pour Moivre, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point pour la factorisation, 1 point pour le module et l'argument justifiés ; d) 0,5 point pour la somme géométrique, 0,5 point pour l'angle moitié et le résultat.

Exercice 3 : Équations dans C (5 points)

- a. Cherchons $w = \alpha + i\beta$ avec α, β réels et $w^2 = -8 - 6i$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, puis les modules :

$$\alpha^2 - \beta^2 = -8, \quad 2\alpha\beta = -6, \quad \alpha^2 + \beta^2 = |-8 - 6i| = 10.$$

On en déduit $\alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 9$. De plus, $\alpha\beta < 0$, donc α et β sont de signes contraires. **Les racines carrées de $-8 - 6i$ sont $1 - 3i$ et $-1 + 3i$.** Vérification : $(1 - 3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i$.

- b. Le discriminant vaut $\Delta = (3+i)^2 - 4(4+3i) = 8 + 6i - 16 - 12i = -8 - 6i$. D'après a), $\delta = 1 - 3i$ vérifie $\delta^2 = \Delta$. Les solutions sont donc

$$z_1 = \frac{3+i+1-3i}{2} = 2-i, \quad z_2 = \frac{3+i-1+3i}{2} = 1+2i.$$

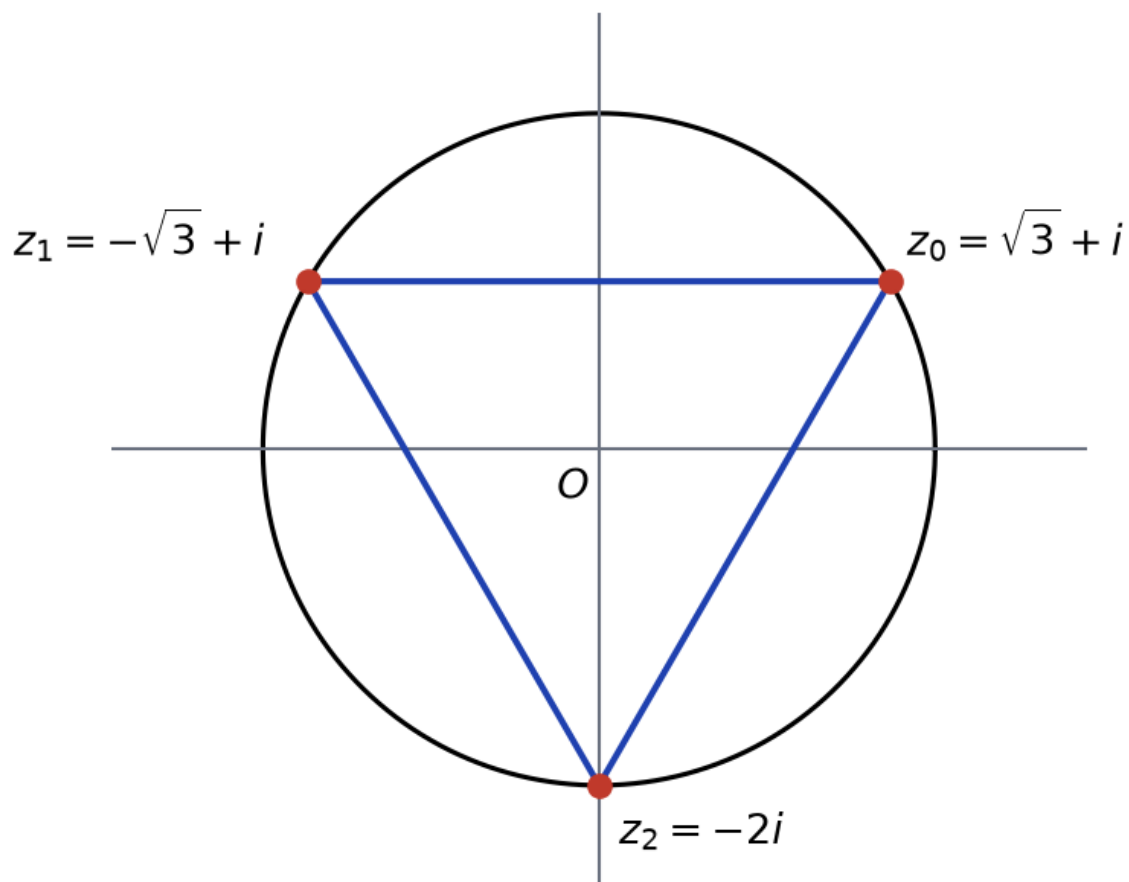
Vérification : $z_1 + z_2 = 3+i$ et $z_1 z_2 = 2 + 4i - i + 2 = 4 + 3i$. **L'ensemble des solutions est $\left\{ \begin{matrix} 2-i, \\ 1+2i \end{matrix} \right\}$.**

- c. On a $8i = 8e^{i\pi/2}$, et $z_0 = 2e^{i\pi/6}$ est une solution particulière, car $z_0^3 = 8e^{i\pi/2}$. Pour

$z \in \mathbb{C}$, $z^3 = z_0^3$ équivaut à $\left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1$, c'est-à-dire $\frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_3$.

Les solutions sont donc $z_k = 2e^{i(\pi/6 + 2k\pi/3)}$, $k \in \{0, 1, 2\}$:

$$z_0 = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i, \quad z_1 = 2e^{5i\pi/6} = -\sqrt{3} + i, \quad z_2 = 2e^{3i\pi/2} = -2i.$$



Les trois solutions sont $\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} + i$ et $-2i$; elles forment un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2 .

Barème : a) 1 point pour le système avec le module, 0,5 point pour les deux racines ; b) 0,5 point pour le discriminant, 1 point pour les deux solutions ; c) 0,5 point pour la solution particulière, 0,5 point pour la

réduction aux racines cubiques de l'unité, 0,5 point pour les formes algébriques, 0,5 point pour le triangle équilatéral.

Exercice 4 : Problème : pentagone régulier et cosinus de 2π sur 5 (6 points)

a. Les nombres $1, \omega, \dots, \omega^4$ sont les éléments de $\mathbb{U}_5$. **D'après la question de cours avec $n = 5$, leur somme est nulle.**

b. Comme $|\omega| = 1$ et $\omega^5 = 1$, on a $\omega^4 = \omega^{-1} = \bar{\omega}$. Donc $a = \omega + \bar{\omega} = 2\operatorname{Re}(\omega) = 2\cos\frac{2\pi}{5}$. De même, $\omega^3 = \overline{\omega^2}$, donc $b = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.

Ensuite, $a + b = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1$ d'après a). Enfin, en utilisant $\omega^5 = 1$:

$$ab = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^3 + \omega^4 + \omega + \omega^2 = -1.$$

Ainsi $a + b = -1$ et $ab = -1$.

c. Les réels a et b ont pour somme -1 et pour produit -1 . Ce sont donc les racines de $X^2 + X - 1$, c'est-à-dire $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Or $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $a = 2\cos\frac{2\pi}{5} > 0$, et a est la racine positive. **Donc**
 $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

d. Comme $\omega = e^{2i\pi/5}$, l'application $z \rightarrow \omega z$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{5}$.

Elle envoie ω^k sur ω^{k+1} pour $0 \leq k \leq 3$, et ω^4 sur $\omega^5 = 1$: elle permute donc les cinq sommets.

De plus, $|\omega^{k+1} - \omega^k| = |\omega^k| |\omega - 1| = |\omega - 1|$. Par l'angle moitié,
 $\omega - 1 = e^{i\pi/5}(e^{i\pi/5} - e^{-i\pi/5}) = 2i \sin \frac{\pi}{5} e^{i\pi/5}$. **Chaque côté mesure donc $2 \sin \frac{\pi}{5}$: le pentagone est régulier.**

- e. Le point fixe vérifie $z_0 = (1+i)z_0 + 2$, soit $-iz_0 = 2$, donc $z_0 = 2i$. En soustrayant $z_0 = (1+i)z_0 + 2$ à $f(z) = (1+i)z + 2$, on obtient $f(z) - 2i = (1+i)(z - 2i)$, avec $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$.

Ainsi f est la similitude directe de centre $2i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Elle multiplie les distances par $\sqrt{2}$. Par conséquent, l'image du pentagone est un pentagone régulier de centre $f(0) = 2$ et de côté $2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{5}$.

Barème : a) 0,5 point ; b) 1 point pour les deux cosinus, 0,5 point pour la somme, 0,5 point pour le produit ; c) 0,5 point pour le trinôme, 0,5 point pour ses racines, 0,5 point pour le choix du signe ; d) 0,5 point pour la rotation, 0,5 point pour la longueur ; e) 0,5 point pour le point fixe et la nature, 0,5 point pour l'image du pentagone.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : complexes, racines n-ièmes et trigonométrie

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours [« Nombres complexes » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [nombres complexes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : polynômes, arithmétique et nombres complexes](#)