

Corrigé du contrôle de maths L1 : bijections et relations d'équivalence

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : composition et injectivité	4 points
Exercice 2 : Images directes et réciproques par la fonction carré	4 points
Exercice 3 : Deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$	5 points
Exercice 4 : Problème : relation d'équivalence et ordre de divisibilité	7 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : composition et injectivité (4 points)

- a. Une application $f : E \rightarrow F$ est injective si $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. Elle est surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

Supposons $g \circ f$ injective. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. En appliquant g , on obtient $g(f(x)) = g(f(x'))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Comme $g \circ f$ est injective, $x = x'$. **Donc f est injective.**

Supposons maintenant $g \circ f$ surjective. Soit $z \in G$. Il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = z$. Posons alors $y = f(x)$: c'est un élément de F qui vérifie $g(y) = z$.
Donc g est surjective.

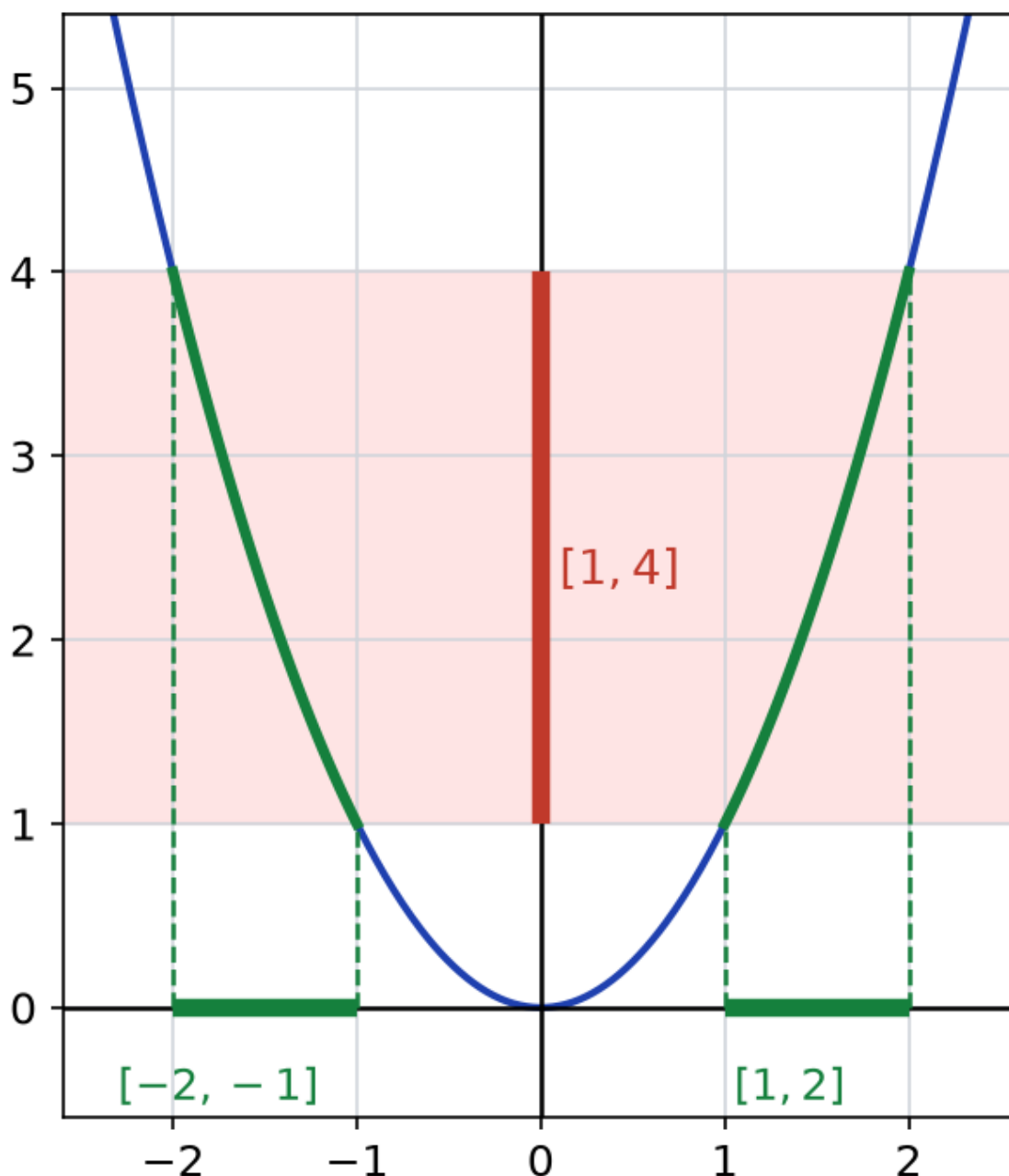
- b. Prenons $E = [0, +\infty[$, $F = G = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ (l'injection canonique) et $g(y) = y^2$. Alors $g \circ f$ est l'application $x \rightarrow x^2$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Elle est injective : si $x, x' \geq 0$ et $x^2 = x'^2$, alors $(x-x')(x+x') = 0$. Or si $x + x' = 0$, les deux réels positifs sont nuls ; dans tous les cas, $x = x'$. En revanche, $g(-1) = g(1) = 1$ avec $-1 \neq 1$. **Ainsi $g \circ f$ est injective, mais g ne l'est pas.**

Barème : a) 0,5 point pour les définitions, 1 point pour chaque implication ; b) 0,5 point pour le choix des applications, 0,5 point pour l'injectivité de la composée, 0,5 point pour la non-injectivité de g .

Exercice 2 : Images directes et réciproques par la fonction carré (4 points)

- a. Soit $x \in [-1, 2]$. Alors $|x| \leq 2$, donc $0 \leq x^2 \leq 4$: ainsi $f([-1, 2]) \subset [0, 4]$.
Réciproquement, soit $y \in [0, 4]$; le réel $x = \sqrt{y}$ appartient à $[0, 2] \subset [-1, 2]$ et vérifie $f(x) = y$. **Donc $f([-1, 2]) = [0, 4]$.**
- b. Par définition, $x \in f^{-1}([1, 4])$ si et seulement si $1 \leq x^2 \leq 4$. La fonction racine carrée étant croissante, cela équivaut à $1 \leq |x| \leq 2$. **Donc $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$.**



- c. Un carré est toujours positif, donc aucun réel ne vérifie $x^2 \in [-3, -1]$. Ainsi $f^{-1}([-3, -1]) = \emptyset$.

Ensuite, $x^2 \in [-1, 4]$ équivaut à $x^2 \leq 4$, soit $x \in [-2, 2]$. Par le même raisonnement qu'en a), $f([-2, 2]) = [0, 4]$. Donc $f(f^{-1}([-1, 4])) = [0, 4]$, qui est strictement inclus dans $[-1, 4]$.

- d. Soit $y \in u(u^{-1}(B))$. Il existe $x \in u^{-1}(B)$ tel que $y = u(x)$; or $x \in u^{-1}(B)$ signifie $u(x) \in B$. Donc $y \in B$, d'où l'inclusion.

Supposons u surjective et soit $y \in B$. Il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. Comme $u(x) \in B$, on a $x \in u^{-1}(B)$, puis $y = u(x) \in u(u^{-1}(B))$. **Il y a donc égalité lorsque u est surjective.** La question c) montre que l'inclusion peut être stricte quand u n'est pas surjective.

Barème : a) 0,5 point par inclusion ; b) 0,5 point pour l'équivalence avec la valeur absolue, 0,5 point pour le résultat ; c) 0,5 point pour l'ensemble vide, 0,5 point pour $[0,4]$ et la comparaison ; d) 0,5 point pour l'inclusion, 0,5 point pour le cas surjectif.

Exercice 3 : Deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (5 points)

- a. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On résout $\varphi(x, y) = (u, v)$, c'est-à-dire le système $x + y = u$ et $x - y = v$. En additionnant puis en soustrayant, on obtient $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2}$. Réciproquement, ce couple vérifie bien les deux équations.

Ainsi, tout (u, v) admet exactement un antécédent. **Donc φ est bijective et**

$$\varphi^{-1}(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right).$$

- b. On a $\psi(1, 2) = (3, 2)$ et $\psi(2, 1) = (3, 2)$, alors que $(1, 2) \neq (2, 1)$. **Donc ψ n'est pas injective.**

- c. Supposons que $\psi(x, y) = (s, p)$. Alors $(X - x)(X - y) = X^2 - sX + p$, donc ce trinôme admet les racines réelles x et y . Par conséquent, son discriminant est positif : $s^2 - 4p \geq 0$.

Réciproquement, supposons $s^2 - 4p \geq 0$ et posons $\delta = \sqrt{s^2 - 4p}$, $x = \frac{s+\delta}{2}$, $y = \frac{s-\delta}{2}$. Alors $x + y = s$ et $xy = \frac{s^2 - \delta^2}{4} = \frac{4p}{4} = p$. Donc $\psi(x,y) = (s,p)$.

Par exemple, $(0,1)$ vérifie $0^2 - 4 = -4 < 0$: il n'a pas d'antécédent. **L'application ψ n'est pas surjective, et son image est $\{(s,p) \in \mathbb{R}^2 : s^2 \geq 4p\}$.**

Barème : a) 1 point pour la résolution du système, 0,5 point pour l'unicité et l'existence, 0,5 point pour la réciproque explicite ; b) 1 point ; c) 0,75 point pour le sens direct, 0,75 point pour la construction de l'antécédent, 0,5 point pour la non-surjectivité et l'image.

Exercice 4 : Problème : relation d'équivalence et ordre de divisibilité (7 points)

Partie A : cercles centrés en l'origine

- a. Posons $N(x,y) = x^2 + y^2$, de sorte que $(x,y) \mathcal{R} (x',y')$ équivaut à $N(x,y) = N(x',y')$. La relation hérite alors des propriétés de l'égalité des réels. Elle est réflexive, car $N(x,y) = N(x,y)$. Elle est symétrique, car l'égalité l'est. Enfin, elle est transitive : si $N(x,y) = N(x',y')$ et $N(x',y') = N(x'',y'')$, alors $N(x,y) = N(x'',y'')$.
Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- b. Posons $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. La classe de (x_0, y_0) est l'ensemble des points (x,y) tels que $x^2 + y^2 = r^2$. Si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, c'est le cercle de centre O et de rayon $r > 0$; la classe de l'origine est le singleton $\{(0,0)\}$.
- c. L'application $\Phi : \mathcal{Q} \rightarrow [0, +\infty[$ est bien définie, car tous les éléments d'une même classe ont, par définition, la même valeur de N , qui est positive.

Elle est injective. En effet, soient C et C' deux classes telles que $\Phi(C) = \Phi(C')$.
Choisissons $(x,y) \in C$ et $(x',y') \in C'$. Alors $N(x,y) = N(x',y')$, donc ces points
sont en relation, et leurs classes sont égales : $C = C'$.

Elle est surjective. En effet, pour $t \geq 0$, la classe du point $(\sqrt{t}, 0)$ a pour image t . **Donc Φ est une bijection de $\mathcal{Q}$ sur $[0, +\infty[$.**

Partie B : la divisibilité

d. Réflexivité : $a = 1 \times a$, donc $a \mid a$.

Antisymétrie : si $a \mid b$ et $b \mid a$, il existe $k, k' \in \mathbb{N}^*$ tels que $b = ka$ et $a = k'b$.
Alors $a = kk'a$, et comme $a \neq 0$, $kk' = 1$. Or k et k' sont des entiers au moins
égaux à 1, donc $k = k' = 1$, puis $a = b$.

Transitivité : si $b = ka$ et $c = k'b$, alors $c = (kk')a$ avec $kk' \in \mathbb{N}^*$, donc $a \mid c$.
La divisibilité est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

e. On n'a ni $2 \mid 3$ ni $3 \mid 2$. **L'ordre n'est donc pas total : il est partiel.**

f. Un entier $m \in \mathbb{N}^*$ majore $\mathcal{A}$ si et seulement s'il est multiple de 2, 3, 4 et 6. Il est
alors multiple de 4 et de 3, qui sont premiers entre eux, donc multiple de 12 ;
réciproquement, tout multiple de 12 convient. **Les majorants sont les multiples de 12, et le
plus petit d'entre eux est 12**, car 12 divise chacun d'eux.

Un plus grand élément de $\mathcal{A}$ serait un majorant appartenant à $\mathcal{A}$. Or aucun des nombres 2,
3, 4, 6 n'est multiple de 12. **Donc $\mathcal{A}$ n'a pas de plus grand élément.**

Barème : a) 0,5 point par propriété ; b) 0,5 point pour le cercle, 0,5 point pour le cas de l'origine ; c) 0,5 point pour la bonne définition, 0,5 point pour l'injectivité, 0,5 point pour la surjectivité ; d) 0,5 point par propriété, l'antisymétrie exigeant l'argument sur k et k prime ; e) 0,5 point ; f) 0,5 point pour les majorants et 12, 0,5 point pour l'absence de plus grand élément.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : bijections et relations d'équivalence

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Applications et relations](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [applications et relations](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).