

Corrigé du contrôle de maths L1 : applications linéaires, noyau, image et rang

Barème du contrôle

Exercice	Points
Exercice 1 : Question de cours : injectivité et théorème du rang	3 points
Exercice 2 : Une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$	4 points
Exercice 3 : La dérivation sur les polynômes	4 points
Exercice 4 : Projection sur un plan parallèlement à une droite	4 points
Exercice 5 : Problème : un endomorphisme nilpotent	5 points
Total	20 points

Exercice 1 : Question de cours : injectivité et théorème du rang (3 points)

a.

Supposons f injective. On sait que $f(0_E) = 0_F$ par linéarité. Si $x \in \text{Ker } f$, alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$, donc $x = 0_E$ par injectivité. Ainsi $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

Réciproquement, supposons $\text{Ker } f = \{0_E\}$. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Par linéarité, $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0_F$, donc $x - y \in \text{Ker } f$. Par conséquent,

$x = y$. Ainsi f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

b.

Théorème du rang : si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im } f$ est de dimension finie et $\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = n$. D'après la question a et le théorème du rang :

$$u \text{ injectif} \Leftrightarrow \dim \text{Ker } u = 0 \Leftrightarrow \text{rg } u = n.$$

Or $\text{Im } u$ est un sous-espace de E . Il est donc égal à E si et seulement si sa dimension vaut n . Ainsi $\text{rg } u = n \Leftrightarrow u$ surjectif. **Par conséquent, u injectif $\Leftrightarrow u$ surjectif $\Leftrightarrow u$ bijectif.**

Erreur fréquente : appliquer ce résultat à une application entre deux espaces de dimensions différentes. Il faut $\dim E = \dim F$, et la dimension finie est indispensable.

Barème : a) 1 point : 0,5 point par sens ; b) 2 points : 1 point pour l'énoncé complet du théorème du rang, 1 point pour les équivalences justifiées.

Exercice 2 : Une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ (4 points)

a.

Soient $X = (x, y, z)$, $X' = (x', y', z')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Chaque composante de f est une combinaison linéaire des coordonnées. Donc $f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X')$, par un calcul direct composante par composante. **L'application f est linéaire.**

b.

On résout $f(x, y, z) = (0, 0)$:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

En additionnant les deux lignes, $3x + 3z = 0$, donc $x = -z$. Ensuite, la première ligne donne $y = x + 2z = z$. Ainsi $(x, y, z) = z(-1, 1, 1)$.

Vérification : $f(-1, 1, 1) = (-1 - 1 + 2, -2 + 1 + 1) = (0, 0)$. **Donc**
 $\text{Ker } f = \text{Vect}((-1, 1, 1))$, **de base** $((-1, 1, 1))$.

c.

D'après le théorème du rang, $\text{rg } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f = 3 - 1 = 2$. Or $\text{Im } f$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2. Donc $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$. **L'application f est de rang 2, surjective, mais pas injective car son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$.**

d.

D'abord, on cherche un antécédent particulier avec $z = 0$: $x - y = 1$ et $2x + y = 2$. En additionnant, $3x = 3$, donc $x = 1$ et $y = 0$. Ainsi $f(1, 0, 0) = (1, 2)$.

Ensuite, $f(X) = (1, 2) \Leftrightarrow f(X - (1, 0, 0)) = 0 \Leftrightarrow X - (1, 0, 0) \in \text{Ker } f$. **L'ensemble des antécédents de $(1, 2)$ est la droite affine $\{(1 - t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.**

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 1 point pour la résolution, 0,5 point pour la base ; c) 1 point : 0,5 point pour le rang, 0,5 point pour les conclusions ; d) 1 point : 0,5 point pour l'antécédent particulier, 0,5 point

pour l'ensemble.

Exercice 3 : La dérivation sur les polynômes (4 points)

a.

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$, donc D est linéaire. De plus, si $\deg P \leq n$, alors $\deg P' \leq n - 1 \leq n$. **Ainsi D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.**

b.

D'abord, $P' = 0$ si et seulement si P est constant. **Donc $\text{Ker } D = \mathbb{R}_0[X]$, de dimension 1.**

Ensuite, $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$. Le théorème du rang donne $\text{rg } D = (n + 1) - 1 = n$. Or, pour tout P , $\deg P' \leq n - 1$, donc $\text{Im } D \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ces deux espaces ont la même dimension n . **Par conséquent, $\text{Im } D = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.**

c.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $D^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$, car la dérivée d'ordre $n + 1$ d'un polynôme de degré au plus n est nulle. En revanche, $D^n(X^n) = n! \neq 0$. **Donc $D^{n+1} = 0$ et $D^n \neq 0$: D est nilpotent d'indice $n + 1$.**

d.

Soit $P \in \text{Ker } \psi$, c'est-à-dire $P = P'$. Si $P \neq 0$, alors $\deg P' < \deg P$ (ou $P' = 0$), ce qui contredit $P = P'$. Donc $P = 0$ et ψ est injectif. Or ψ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie. D'après l'exercice 1, ψ est donc un automorphisme.

De plus, id et D commutent. Par télescopage,
 $(\text{id} - D)(\text{id} + D + \dots + D^n) = \text{id} - D^{n+1} = \text{id}$. Ainsi
 $\psi^{-1} = \text{id} + D + \dots + D^n$.

Pour $n = 2$, $P = \psi^{-1}(X^2) = X^2 + 2X + 2$. Vérification : $P' = 2X + 2$, donc
 $P - P' = X^2$. **Le polynôme cherché est $X^2 + 2X + 2$.**

Barème : a) 0,5 point ; b) 1,5 point : 0,5 point pour le noyau, 1 point pour l'image par le théorème du rang ; c) 1 point ; d) 1 point : 0,5 point pour la bijectivité et l'inverse, 0,5 point pour le polynôme.

Exercice 4 : Projection sur un plan parallèlement à une droite **(4 points)**

a.

Le plan $\mathcal{P}$ est le noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z) \rightarrow x + y - z$. C'est donc un hyperplan : $\dim \mathcal{P} = 2$. De plus, $\dim \mathcal{D} = 1$, car $u \neq 0$.

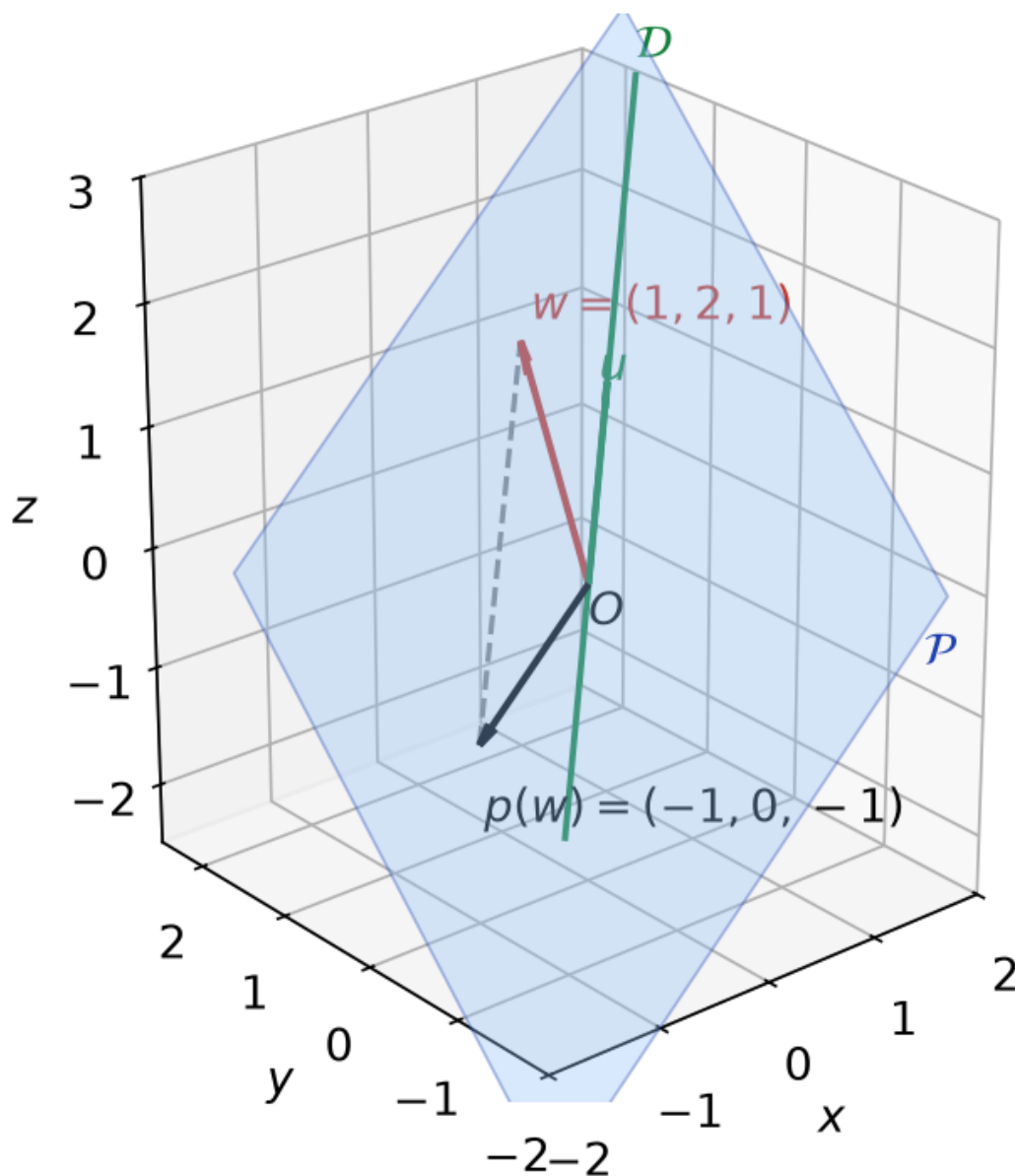
Ensuite, soit $tu = (t, t, t) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}$. Alors $t + t - t = t = 0$. Donc
 $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \{0\}$. Enfin, $\dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{D} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. **Ainsi $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.**

b.

Soit $X = (x, y, z)$. On écrit $X = a + tu$ avec $a \in \mathcal{P}$ et t réel ; alors
 $p(X) = a = X - tu$. La condition $X - tu \in \mathcal{P}$ s'écrit
 $(x - t) + (y - t) - (z - t) = 0$, soit $t = x + y - z$. Donc :

$$p(x, y, z) = (x - (x + y - z), y - (x + y - z), z - (x + y - z)).$$

Ainsi $p(x, y, z) = (-y + z, -x + z, -x - y + 2z)$. Pour $w = (1, 2, 1)$, on trouve $t = 2$ et $p(w) = (-1, 0, -1)$. On vérifie que $-1 + 0 - (-1) = 0$, donc $p(w) \in \mathcal{P}$, et que $w - p(w) = (2, 2, 2) \in \mathcal{D}$.



c.

Les colonnes de M sont les images des vecteurs de la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un calcul ligne par colonne donne, par exemple, pour la première ligne : $0 + 1 - 1 = 0$, puis $0 + 0 - 1 = -1$, puis $0 - 1 + 2 = 1$. On procède de même pour les deux autres lignes. **On obtient** $M^2 = M$, ce qui traduit $p \circ p = p$. De plus, la trace de M vaut 2, qui est bien le rang de p .

d.

La symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$ vérifie $s = 2p - \text{id}$. En effet, si $X = a + t u$, alors $s(X) = a - t u = 2a - X$. Donc :

$$s(x, y, z) = (-x - 2y + 2z, -2x - y + 2z, -2x - 2y + 3z).$$

Ainsi $s(x, y, z) = (-x - 2y + 2z, -2x - y + 2z, -2x - 2y + 3z)$. Enfin, $s(1, 1, 1) = (-1 - 2 + 2, -2 - 1 + 2, -2 - 2 + 3) = (-1, -1, -1) = -u$.

Barème : a) 1 point : 0,5 point pour les dimensions, 0,5 point pour l'intersection et la conclusion ; b) 1,5 point : 0,5 point pour la méthode, 0,5 point pour t , 0,5 point pour $p(x, y, z)$ et $p(w)$; c) 0,5 point ; d) 1 point : 0,5 point pour $s = 2p - \text{id}$, 0,5 point pour l'expression et la vérification.

Exercice 5 : Problème : un endomorphisme nilpotent (5 points)

Partie A : cas général

a.

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ non tous nuls tels que $\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$. Soit j le plus petit indice tel que $\lambda_j \neq 0$.

On applique u^{p-1-j} , qui est linéaire. Pour $k > j$, on a $k + p - 1 - j \geq p$, donc $u^{k+p-1-j}(x) = 0$. Il reste $\lambda_j u^{p-1}(x) = 0$. Or $u^{p-1}(x) \neq 0$, donc $\lambda_j = 0$: c'est une contradiction. **La famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est donc libre.**

b.

Dans un espace de dimension n , une famille libre a au plus n éléments. Or la famille précédente en compte p . **Donc $p \leq n$, et $u^n = u^{n-p} \circ u^p = 0$.**

Partie B : un exemple dans $\mathbb{R}^3$

c.

Par produit ligne par colonne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & , & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, le coefficient $(1,1)$ de A^2 vaut $1 + 1 - 1 = 1$. Ensuite, la première ligne de A^3 vaut $(-1 + 1, -1 + 1, -1 + 1) = (0, 0, 0)$. **Comme $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$, v est nilpotent d'indice 3.**

d.

Le noyau est donné par le système $-x - y - z = 0$, $-x - z = 0$, $x + y + z = 0$.
La deuxième équation donne $z = -x$, puis la première donne $y = 0$. **Donc**

$$\text{Ker } v = \text{Vect}((1, 0, -1)).$$

D'après le théorème du rang, $\text{rg } v = 3 - 1 = 2$. L'image est engendrée par les colonnes de A . Or les deux premières, $(-1, -1, 1)$ et $(-1, 0, 1)$, ne sont pas colinéaires. **Donc**
 $\text{Im } v = \text{Vect}((-1, -1, 1), (-1, 0, 1))$, c'est le plan d'équation $x + z = 0$, et $\text{rg } v = 2$.

Enfin, $(1, 0, -1)$ vérifie $1 + (-1) = 0$. **Donc** $\text{Ker } v \subset \text{Im } v$.

e.

On a $v(e_1) = (-1, -1, 1)$, première colonne de A , et $v^2(e_1) = (1, 0, -1)$, première colonne de A^2 . Comme $v^2(e_1) \neq 0$ et que v est d'indice 3, la partie A montre que B' est libre. Elle compte 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$: c'est donc une base.

Ensuite, $v(e_1)$ est le deuxième vecteur de B' , $v(v(e_1))$ est le troisième et $v(v^2(e_1)) = v^3(e_1) = 0$. **La matrice de v dans B' est donc :**

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Barème : a) 1,5 point : 0,5 point pour le choix du plus petit indice, 1 point pour l'application de v^{p-1-j} et la conclusion ; b) 0,5 point ; c) 1 point : 0,5 point pour A^2 , 0,5 point pour A^3 et l'indice ; d) 1 point : 0,5 point pour le noyau, 0,5 point pour l'image et l'inclusion ; e) 1 point : 0,5 point pour la base, 0,5 point pour la matrice.

[Revenir à l'énoncé du contrôle](#)

Après le corrigé du contrôle : applications linéaires, noyau, image et rang

Pour consolider ce que le corrigé vous a appris, relisez le cours « [Applications linéaires](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [applications linéaires](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).