

Convergence dominée

Exercice 1 : Deux premières limites d'intégrales

Déterminer, en justifiant soigneusement les hypothèses, la limite quand $n \rightarrow +\infty$ des intégrales suivantes.

1. $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+x^n}$, pour $n \geq 1$.

2. $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)} dx$, pour $n \geq 1$, l'intégrande étant prolongé par continuité en 0.

Exercice 2 : Limite exponentielle sous l'intégrale

Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ si $x \leq n$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$.

1. Montrer que $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$ pour tout $x \geq 0$, et que $f_n(x) \rightarrow e^{-x}$.

2. Calculer directement $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$, puis retrouver sa limite par convergence dominée.

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x dx$.

4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

Exercice 3 : Domination par morceaux

Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx$.

1. Justifier l'existence de I_n .
2. Déterminer la limite simple de l'intégrande sur $[0, +\infty[$.
3. Construire une fonction dominante intégrable et en déduire $\lim I_n$.

Exercice 4 : Une suite sans domination

Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$.

1. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.
2. Déterminer la limite simple de (f_n) sur $[0, +\infty[$.
3. En déduire qu'il n'existe aucune fonction φ intégrable sur $[0, +\infty[$ telle que $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n .
4. Retrouver ce résultat directement : pour $x \in]0,1]$, on note $n = \lfloor 1/x \rfloor$. Montrer que $f_n(x) \geq \frac{1}{4ex}$ et conclure.

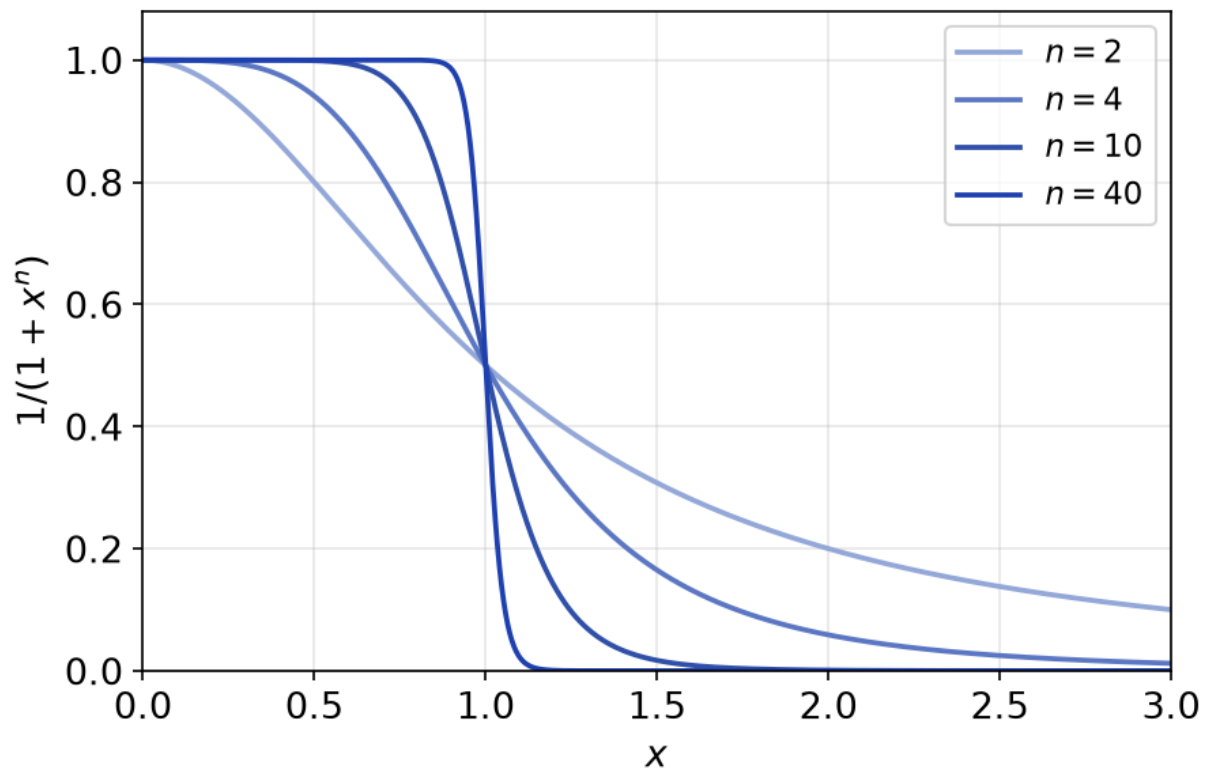
Exercice 5 : Limites avec un paramètre réel

Pour $\lambda > 0$, on pose $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \arctan(\lambda x) e^{-x} dx$.

1. Justifier que $F(\lambda)$ est bien défini.
2. Déterminer la limite de $F(\lambda)$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$.
3. Montrer que $F(\lambda) \sim \lambda$ quand $\lambda \rightarrow 0^+$. On pourra utiliser l'inégalité $0 \leq \arctan u \leq u$ pour $u \geq 0$.

Exercice 6 : Développement asymptotique d'une suite d'intégrales

Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$. La figure ci-dessous représente l'intégrande pour quelques valeurs de n .



1. Montrer que $u_n \rightarrow 1$.
2. Établir, à l'aide du changement de variable $t = x^n$, l'égalité

$$n(u_n - 1) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{1/n} - 1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{t^{1/n}}{1+t} dt.$$

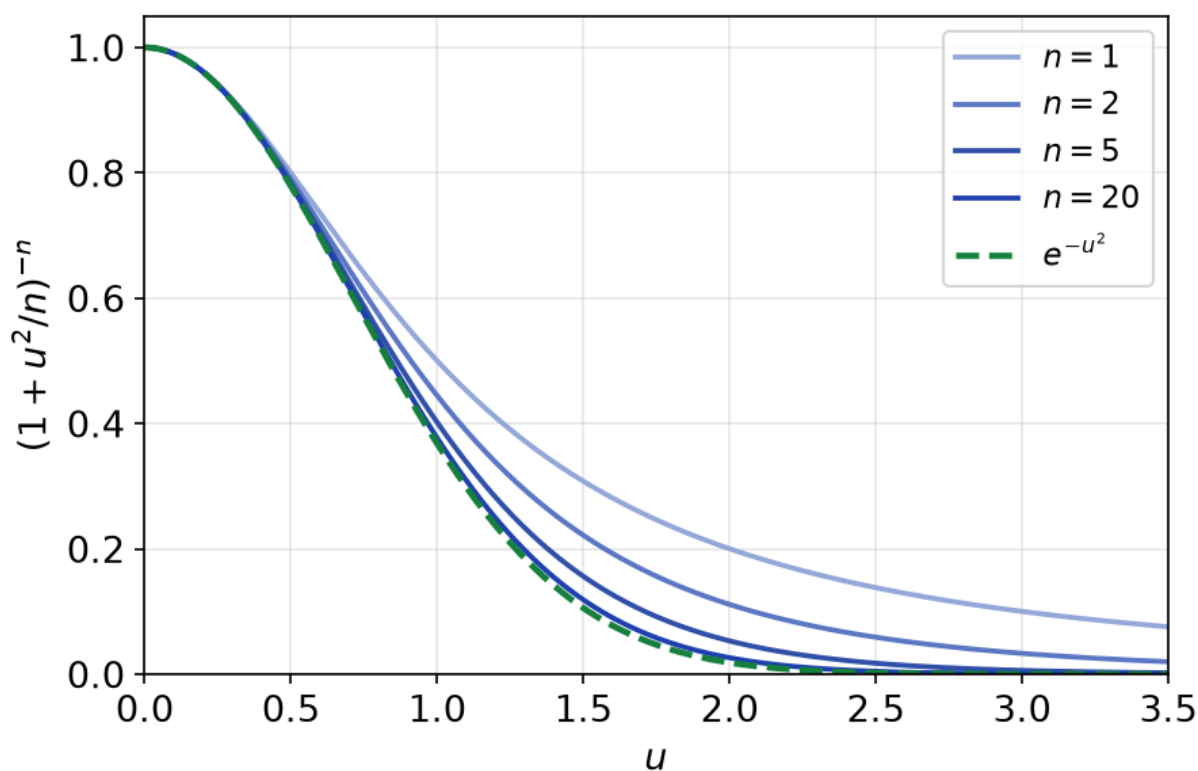
3. En déduire que $u_n = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 7 : Équivalent par changement de variable

Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Justifier l'existence de I_n .
2. À l'aide du changement de variable $x = u/\sqrt{n}$, exprimer $\sqrt{n} I_n$ comme une intégrale sur $[0, +\infty[$.
3. À l'aide de l'inégalité de Bernoulli $(1+a)^n \geq 1 + na$ pour $a \geq 0$, établir une domination, puis montrer que $I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

La figure ci-dessous montre la convergence des intégrandes obtenus à la question 2.



Exercice 8 : Comportement asymptotique d'une transformée

Pour $t > 0$, on pose $G(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} dx$.

1. Justifier l'existence de $G(t)$.
2. Déterminer les limites de G en 0^+ et en $+\infty$.
3. Montrer que $G(t) \sim \frac{1}{t}$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Exercice 9 : Une identité approchée

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx = f(0)$.
2. Vérifier ce résultat par un calcul direct lorsque $f = \cos$.
3. Montrer plus généralement que $\lambda \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\lambda x} dx \rightarrow f(0)$ quand le réel λ tend vers $+\infty$.

Exercice 10 : Une intégrale égale à $\zeta(2)$

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{-\ln(1-x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{6}$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx$.

Exercice 11 : Intégration terme à terme avec des signes alternés

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^1 x^n \ln x dx$.

2. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

3. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12}$ en vérifiant les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme.

Exercice 12 : La fonction zêta sous forme intégrale

Pour $s > 0$, on note $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$, et pour $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

1. Pour $n \geq 1$ et $s > 0$, calculer $\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx$ en fonction de $\Gamma(s)$.

2. Montrer que, pour tout $s > 1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s) \zeta(s).$$

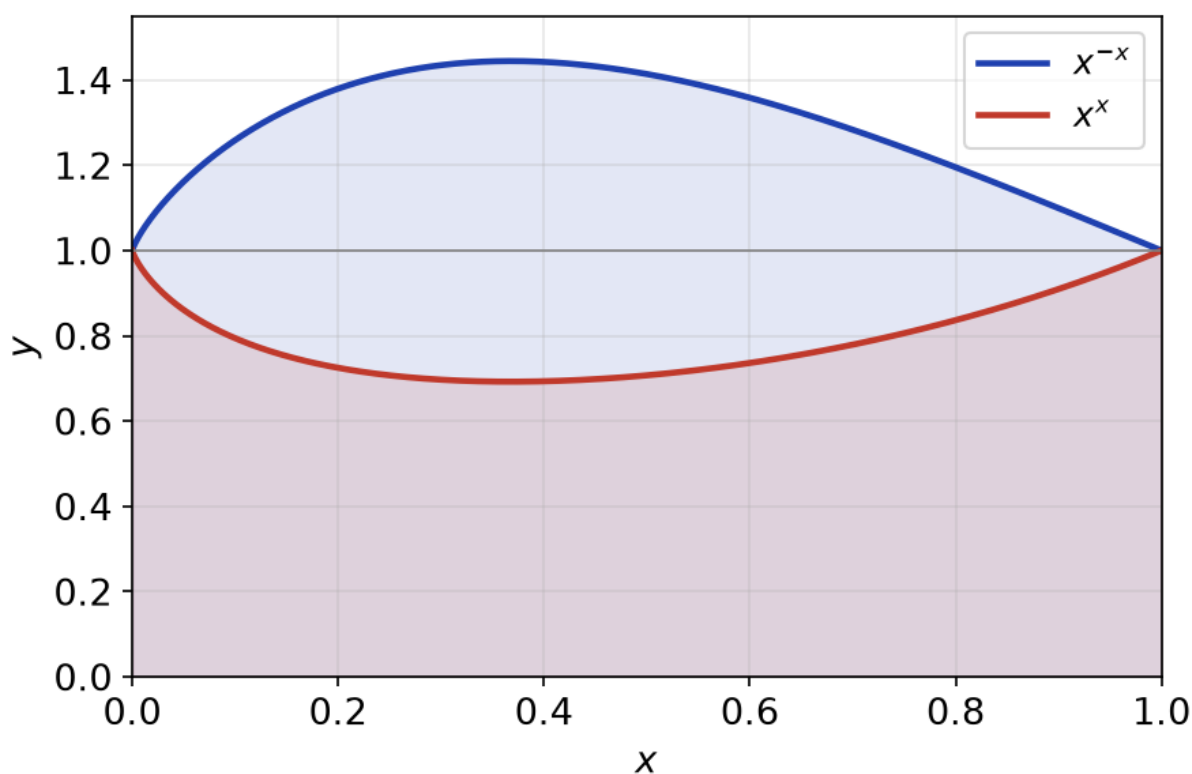
3. En admettant $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$.
4. Pour $0 < s \leq 1$, montrer que l'intégrale diverge de deux façons : par un équivalent en 0, puis par le théorème positif.

Exercice 13 : Une intégrale oscillante

1. Pour $n \geq 1$, calculer $\int_0^{+\infty} \sin(x) e^{-nx} dx$.
2. Expliquer pourquoi le théorème d'intégration terme à terme positive ne s'applique pas à la série $\sum_{n \geq 1} \sin(x) e^{-nx}$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Exercice 14 : Le rêve de l'étudiant

La figure ci-dessous représente les fonctions $x \rightarrow x^{-x}$ et $x \rightarrow x^x$ sur $]0,1]$, prolongées par 1 en 0. On cherche les aires colorées sous ces courbes.



1. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\int_0^1 x^k (-\ln x)^k dx = \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}$. On pourra poser $x = e^{-t}$.

2. Montrer que $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

3. Montrer que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

4. En déduire une valeur approchée de $\int_0^1 x^x dx$ à 10^{-3} près.

Exercice 15 : La série harmonique alternée

Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$, on pose $S_N(x) = \sum_{n=0}^N (-x)^n$.

1. Montrer que le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas à la série $\sum (-x)^n$ sur $[0,1[$.
2. Exprimer $S_N(x)$ sous forme close et établir une domination indépendante de N .
3. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$.
4. Montrer que le reste vérifie $\left| \ln 2 - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} \right| \leq \frac{1}{N+2}$.

Exercice 16 : Choisir la bonne méthode

On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$. Quel théorème utilisez-vous, et pourquoi ?
2. Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ à l'aide d'une décomposition en éléments simples.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$. Expliquer pourquoi le théorème d'intégration terme à terme ne suffit pas ici, et quel outil le remplace.

Exercice 17 : Une interversion illégitime

Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = n e^{-nx} - (n+1) e^{-(n+1)x}$.

1. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

2. Calculer $\sum_{n=1}^N f_n(x)$, puis la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ pour $x > 0$. Comparer $\int_0^{+\infty} \sum f_n$ et $\sum \int_0^{+\infty} f_n$.

3. Sans calcul, en déduire la nature de la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$. Vérifier ensuite par le calcul que $\int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{2}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

4. Construire une famille double $(u_{n,k})$ de réels telle que $\sum_n \sum_k u_{n,k} \neq \sum_k \sum_n u_{n,k}$, sur le même modèle.

Exercice 18 : Intégrale de $f(x^n)$

Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x^n) dx = f(0)$.

2. On suppose de plus f de classe C^1 . Montrer que

$$n \left(\int_0^1 f(x^n) dx - f(0) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \int_0^1 \frac{f(t) - f(0)}{t} dt.$$

On pourra poser $t = x^n$.

3. Application : donner un développement asymptotique à deux termes de $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

Exercice 19 : Problème, formule de Gauss pour la fonction Gamma

Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \text{ et } J_n(x) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du,$$

et l'on pose aussi $J_0(x) = \int_0^1 u^{x-1} du$.

1. Justifier l'existence de $\Gamma(x)$, de $I_n(x)$ et de $J_n(x)$ pour $x > 0$.

2. Montrer que $I_n(x) \rightarrow \Gamma(x)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

3. Montrer que $I_n(x) = n^x J_n(x)$.

4. Établir, pour $n \geq 1$, la relation $J_n(x) = \frac{n}{x} J_{n-1}(x+1)$.

5. En déduire que $J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$, puis la formule de Gauss :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

6. Retrouver à partir de cette formule les égalités $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.

Exercice 20 : Problème, intégrale de Fermi et fonction éta

Pour $s > 0$, on pose $K(s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx$ et $\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$. On reprend les notations Γ et ζ de l'exercice 12.

1. Justifier l'existence de $K(s)$ et de $\eta(s)$ pour tout $s > 0$.
2. Pour $x > 0$, écrire $\frac{1}{e^x + 1}$ comme somme d'une série de fonctions exponentielles.
3. On suppose $s > 1$. Montrer que $K(s) = \Gamma(s) \eta(s)$ par le théorème d'intégration terme à terme.
4. On suppose $0 < s \leq 1$. Expliquer pourquoi la méthode précédente échoue, puis prouver encore $K(s) = \Gamma(s) \eta(s)$ par convergence dominée sur les sommes partielles.
5. Vérifier le résultat pour $s = 1$ par un calcul direct de $K(1)$.
6. Montrer que $\eta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$ pour $s > 1$. En admettant $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, calculer $K(2)$ et $K(4)$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [convergence dominée, cours de maths spé](#)

- À maîtriser avant : [Intégrales généralisées et fonctions intégrables](#), [Séries de fonctions](#)
- Chapitre précédent : [Intégrales généralisées et fonctions intégrables](#)
- Chapitre suivant : [Intégrales à paramètre](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)