Convergence dominée

Corrigé de l'exercice 1 : Deux premières limites d'intégrales

1. Posons $f_n(x) = \frac{1}{1+x^2+x^n}$ sur $[0, +\infty[$. Chaque f_n est continue et positive. D'abord, étudions la limite simple. Si $0 \leq x < 1$, alors $x^n \to 0$ et $f_n(x) \to \frac{1}{1+x^2}$. Si $x = 1$, alors $f_n(1) = \frac{1}{3}$. Si $x > 1$, alors $x^n \to +\infty$ et $f_n(x) \to 0$. La limite f vaut donc $\frac{1}{1+x^2}$ sur $[0,1[$, $\frac{1}{3}$ en 1 et 0 ensuite : elle est continue par morceaux. Ensuite, puisque $x^n \geq 0$, on a $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$, fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ et indépendante de n. Par le théorème de convergence dominée,

$$I_n \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan 1.$$

Ainsi $\lim I_n = \frac{\pi}{4}$.

2. Posons $g_n(x) = \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)}$ pour $x > 0$ et $g_n(0) = 1$. Comme $\frac{\sin u}{u} \to 1$ en 0, chaque g_n est continue sur $[0, +\infty[$. Pour $x > 0$ fixé, $n\sin(x/n) \sim n \cdot \frac{x}{n} = x$, donc $g_n(x) \to \frac{1}{1+x^2}$; c'est aussi vrai en 0. La limite est continue. De plus, l'inégalité $|\sin u| \leq |u|$ donne $|n \sin(x/n)| \leq x$, d'où $|g_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$. Cette dominante est intégrable. Par convergence dominée, $\lim J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 2 : Limite exponentielle sous l'intégrale

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1. Si $x > n$, $f_n(x) = 0$ et l'encadrement est clair. Si $x = n$, $f_n(x) = 0$ aussi. Si $0 \leq x < n$, alors $1 - x/n \in]0,1]$ et $f_n(x) = \exp\big(n \ln(1 - x/n)\big) > 0$. Or la concavité du logarithme donne $\ln(1+u) \leq u$ pour $u > -1$. Avec $u = -x/n$, on obtient $n\ln(1-x/n) \leq -x$. Par croissance de l'exponentielle, $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$. Ensuite, fixons $x \geq 0$. Pour $n > x$, $n \ln(1 - x/n) = n\left(-\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to -x$. Donc $f_n(x) \to e^{-x}$.

2. Posons $u = 1 - x/n$, donc $\mathrm{d}x = -n\,\mathrm{d}u$. Il vient

$$\int_0^n \left(1 - \tfrac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x = n \int_0^1 u^n \,\mathrm{d}u = \tfrac{n}{n+1}.$$

Cette intégrale vaut $\frac{n}{n+1}$ et tend vers 1. Par convergence dominée, on retrouve ce résultat. En effet, l'intégrale vaut $\int_0^{+\infty} f_n$, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction continue $x \to e^{-x}$, et la question 1 fournit la dominante intégrable e^{-x}. Donc $\int_0^{+\infty} f_n \to \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$.

3. L'intégrale vaut $\int_0^{+\infty} f_n(x)\cos x \,\mathrm{d}x$. D'abord, $f_n(x)\cos x \to e^{-x}\cos x$, fonction continue. Ensuite, $|f_n(x)\cos x| \leq e^{-x}$, dominante intégrable. Par convergence dominée, la limite vaut $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x \,\mathrm{d}x$. Or

$$\int_0^{+\infty} e^{(-1+i)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}.$$

En prenant la partie réelle, **la limite vaut $\frac{1}{2}$.**

4. Posons $g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ si $x \leq n$, et $g_n(x) = 0$ sinon. Pour x fixé et $n \geq x$, $n\ln(1 + x/n) \to x$, donc $g_n(x) \to e^x e^{-2x} = e^{-x}$. De plus, $\ln(1 + x/n) \leq x/n$ donne $(1 + x/n)^n \leq e^x$. Ainsi $0 \leq g_n(x) \leq e^{-x}$ pour tout $x \geq 0$. Chaque g_n est continue par morceaux (discontinue en n seulement). Par

convergence dominée, **la limite vaut** $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$ **.**

Corrigé de l'exercice 3 : Domination par morceaux

1. La fonction $h_n : x \to \frac{x^n}{1+x^{n+2}}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. En $+\infty$, $h_n(x) \sim \frac{x^n}{x^{n+2}} = \frac{1}{x^2}$, fonction intégrable sur $[1, +\infty[$. Par comparaison de fonctions positives, I_n **existe**.

2. Si $0 \leq x < 1$, $x^n \to 0$ et $x^{n+2} \to 0$, donc $h_n(x) \to 0$. En $x = 1$, $h_n(1) = \frac{1}{2}$. Si $x > 1$, on écrit $h_n(x) = \frac{1}{x^{-n} + x^2}$, et $x^{-n} \to 0$. **La limite simple est** $h(x) = 0$ **sur** $[0,1[$ **,** $h(1) = \frac{1}{2}$ **,** $h(x) = \frac{1}{x^2}$ **sur** $]1, +\infty[$ **.** Cette fonction est continue par morceaux.

3. Sur $[0,1]$, on a $0 \leq h_n(x) \leq x^n \leq 1$. Sur $[1, +\infty[$, on minore le dénominateur par x^{n+2} , d'où $0 \leq h_n(x) \leq \frac{1}{x^2}$. Posons donc $\varphi(x) = 1$ sur $[0,1]$ et $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]1, +\infty[$. Cette fonction est continue par morceaux, positive et intégrable, avec $\int_0^{+\infty} \varphi = 2$.

   Elle domine tous les h_n . Le théorème de convergence dominée donne

$$I_n \to \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1.$$

   Ainsi $\lim I_n = 1$ **.**

Point de méthode : découper l'intervalle au point où le comportement de x^n change permet presque toujours de construire la dominante.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 4 : Une suite sans domination

1. Une intégration par parties sur $[0, A]$, puis $A \to +\infty$, donne $\int_0^{+\infty} x\,e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x}{n}e^{-nx}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$. Par conséquent, $\int_0^{+\infty} f_n = 1$ **pour tout** $n \geq 1$ **.**

2. En $x = 0$, $f_n(0) = 0$. Pour $x > 0$, les croissances comparées donnent $n^2 e^{-nx} \to 0$. **La suite** (f_n) **converge simplement vers la fonction nulle.**

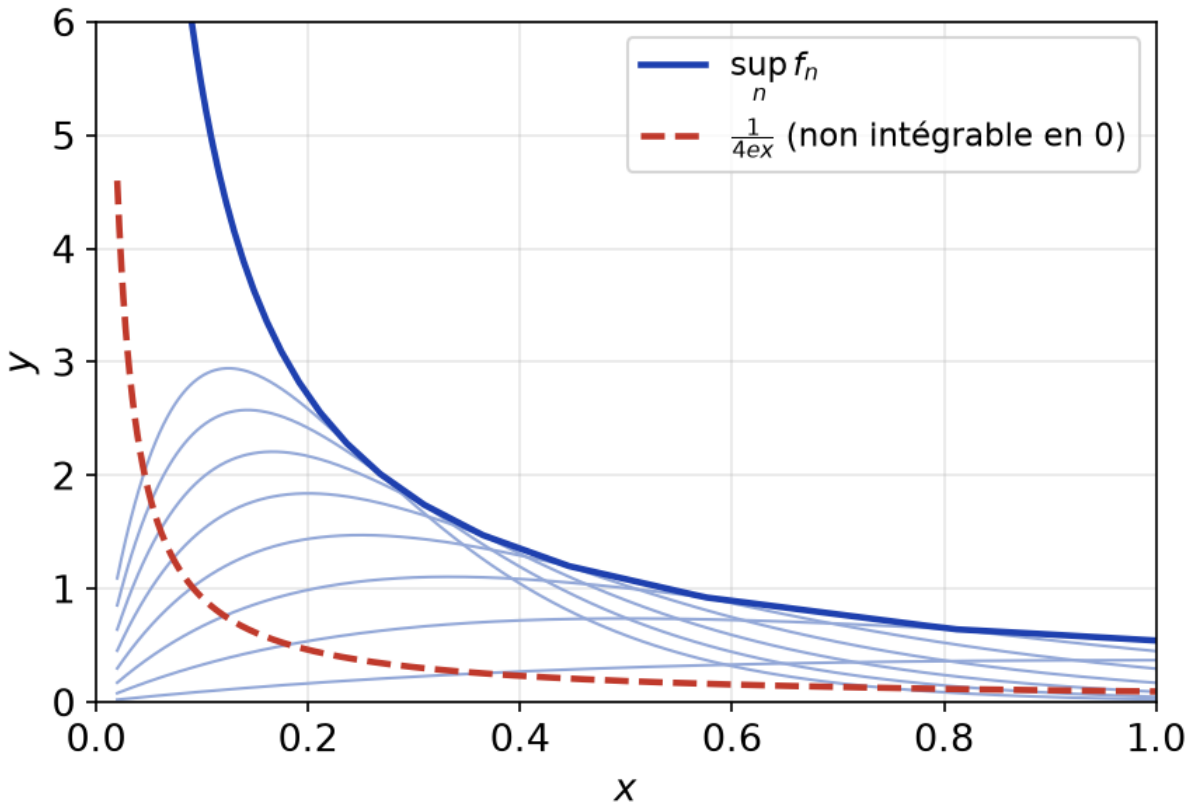
3. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'une telle φ existe. Alors toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont satisfaites, car la limite nulle est continue. On aurait donc $\int_0^{+\infty} f_n \to 0$. Or cette intégrale vaut 1 pour tout n, contradiction. **Aucune dominante intégrable n'existe.**

4. Soit $x \in]0,1]$ et $n = \lfloor 1/x \rfloor \geq 1$. Alors $n \leq \frac{1}{x} < n+1$, donc $\frac{n}{n+1} < nx \leq 1$. D'abord, $nx \leq 1$ donne $e^{-nx} \geq e^{-1}$. Ensuite, $nx > \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$. Enfin, $\frac{1}{x} < n+1 \leq 2n$, donc $n > \frac{1}{2x}$. Par conséquent,

$$f_n(x) = n \cdot (nx) \cdot e^{-nx} \geq \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-1} = \frac{1}{4ex}.$$

Si φ domine toute la suite, alors $\varphi(x) \geq f_n(x) \geq \frac{1}{4ex}$ sur $]0,1]$. Or $x \to \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable en 0. **Donc** φ **ne peut pas être intégrable, ce qui confirme la question 3.**

La figure ci-dessous représente quelques f_n, leur enveloppe supérieure $\sup_n f_n$ et la minorante $\frac{1}{4ex}$ obtenue. L'enveloppe explose en 0 comme $\frac{1}{x}$.



Corrigé de l'exercice 5 : Limites avec un paramètre réel

1. La fonction $x \to \arctan(\lambda\, x)\, e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, $|\arctan(\lambda\, x)\, e^{-x}| \leq \frac{\pi}{2}\, e^{-x}$, fonction intégrable. **Donc $F(\lambda)$ est bien défini.**

2. Pour $x > 0$, $\arctan(\lambda\, x) \to \frac{\pi}{2}$ quand $\lambda \to +\infty$. En $x = 0$, la valeur reste 0. La limite $x \to \frac{\pi}{2} e^{-x}$ sur $]0, +\infty[$, complétée par 0 en 0, est continue par morceaux. La dominante $\frac{\pi}{2} e^{-x}$ est indépendante de λ. Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $F(\lambda) \to \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

3. Pour $\lambda > 0$, écrivons $\frac{F(\lambda)}{\lambda} = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\lambda\, x)}{\lambda}\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$. Pour $x > 0$ fixé, $\arctan(\lambda\, x) \sim \lambda\, x$ quand $\lambda \to 0^+$, donc l'intégrande tend vers $x\, e^{-x}$; en 0, tout vaut 0. Ensuite, $0 \leq \arctan(\lambda\, x) \leq \lambda\, x$ donne $0 \leq \frac{\arctan(\lambda\, x)}{\lambda}\, e^{-x} \leq x\, e^{-x}$,

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

fonction intégrable. Par convergence dominée, $\frac{F(\lambda)}{\lambda} \to \int_0^{+\infty} x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$. **Ainsi** $F(\lambda) \sim \lambda$ **quand** $\lambda \to 0^+$.

Corrigé de l'exercice 6 : Développement asymptotique d'une suite d'intégrales

1. Posons $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$. La limite simple vaut 1 sur $[0,1[$, $\frac{1}{2}$ en 1 et 0 sur $]1,+\infty[$: elle est continue par morceaux. Sur $[0,1]$, $0 \le f_n \le 1$. Sur $[1,+\infty[$ et pour $n \ge 2$, $x^n \ge x^2$, donc $f_n(x) \le \frac{1}{1+x^2}$. La fonction égale à 1 sur $[0,1]$ et à $\frac{1}{1+x^2}$ au-delà est intégrable. Par convergence dominée, $u_n \to \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$.

2. On a $u_n - 1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^n} - 1\right)\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} = -\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$. Le changement de variable $x = t^{1/n}$ est une bijection C^1 strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur lui-même, avec $\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\,t^{1/n-1}\,\mathrm{d}t$. Il vient
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{t^{1/n-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t\cdot t^{1/n-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
En multipliant par n, on obtient l'égalité demandée.

3. Notons $A_n = \int_1^{+\infty} \frac{t^{1/n-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $B_n = \int_0^1 \frac{t^{1/n}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Pour $t>0$, $t^{1/n} \to 1$. D'abord, pour $t \ge 1$ et $n \ge 2$, $t^{1/n} \le t^{1/2}$, donc $0 \le \frac{t^{1/n}-1}{1+t} \le \frac{t^{-1/2}}{t} = t^{-3/2}$, intégrable sur $[1,+\infty[$. Par convergence dominée,
$$A_n \to \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = \left[\ln\frac{t}{1+t}\right]_1^{+\infty} = \ln 2.$$
Ensuite, pour $t \in [0,1]$, $0 \le \frac{t^{1/n}}{1+t} \le 1$, dominante intégrable sur le segment. Donc

$B_n \to \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$. Par conséquent, $n(u_n - 1) \to \ln 2 - \ln 2 = 0$. **Ainsi** $u_n = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Corrigé de l'exercice 7 : Équivalent par changement de variable

1. La fonction $x \to (1+x^2)^{-n}$ est continue et positive. De plus, $(1+x^2)^{-n} \leq \frac{1}{1+x^2}$ car $n \geq 1$. **Donc** I_n **existe.**

2. Le changement de variable $x = u/\sqrt{n}$ est linéaire, avec $dx = du/\sqrt{n}$. Il donne $\sqrt{n}\, I_n = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n}$.

3. Posons $g_n(u) = \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n}$. Pour u fixé, $n \ln\left(1+\frac{u^2}{n}\right) \to u^2$, donc $g_n(u) \to e^{-u^2}$, fonction continue. L'inégalité de Bernoulli avec $a = u^2/n$ donne $\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n \geq 1+u^2$. Ainsi $0 \leq g_n(u) \leq \frac{1}{1+u^2}$, dominante intégrable. Par convergence dominée, $\sqrt{n}\, I_n \to \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **Donc** $I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

Corrigé de l'exercice 8 : Comportement asymptotique d'une transformée

1. Pour $t > 0$, l'intégrande est continue et vérifie $0 < \frac{e^{-tx}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$. **Donc** $G(t)$ **existe.**

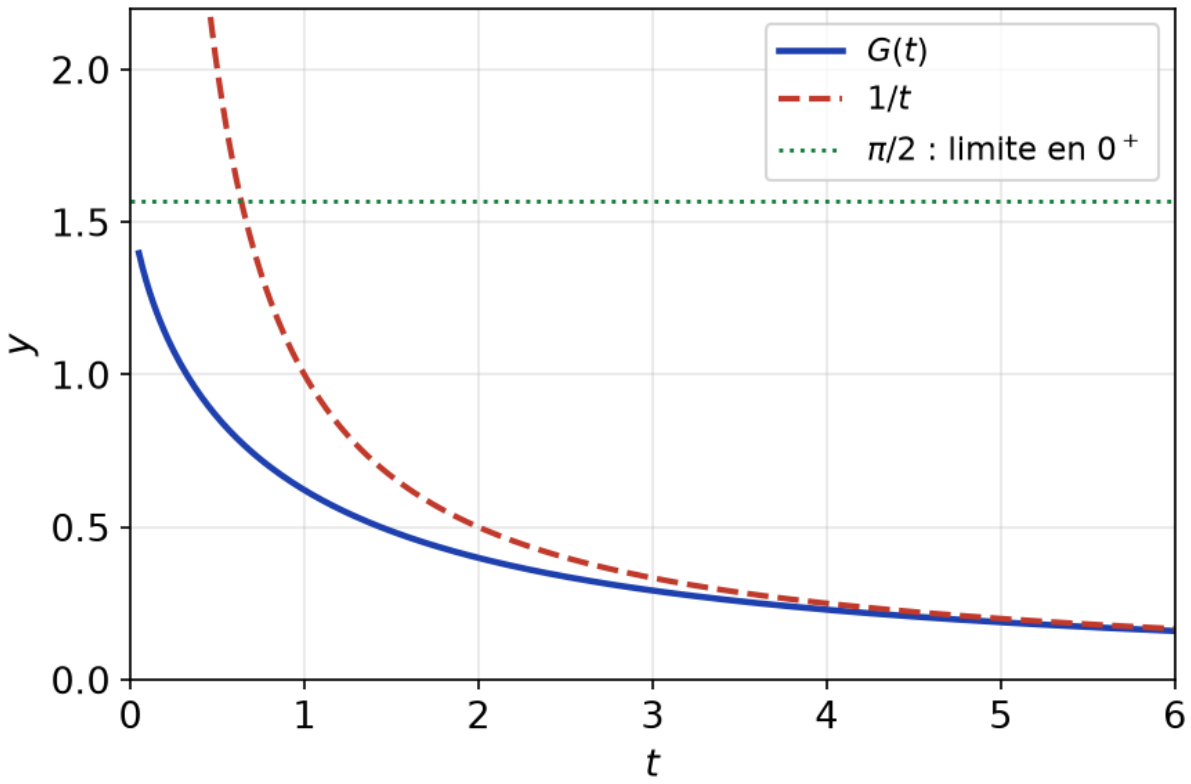
2. La dominante $\frac{1}{1+x^2}$ est intégrable et ne dépend pas de t. Quand $t \to 0^+$, l'intégrande tend vers $\frac{1}{1+x^2}$ pour tout x. Par convergence dominée à paramètre continu, $G(t) \to \frac{\pi}{2}$. Quand $t \to +\infty$, l'intégrande tend vers 0 pour $x > 0$ et vaut 1 en $x = 0$. Cette limite

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

est continue par morceaux. Par le même théorème, $G(t) \to 0$. **Ainsi** $\lim\limits_{0^+} G = \frac{\pi}{2}$ **et** $\lim\limits_{+\infty} G = 0$ **.**

3. Posons $u = tx$. Alors $t\,G(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+u^2/t^2}\,\mathrm{d}u$. Quand $t \to +\infty$, l'intégrande tend vers e^{-u}. De plus, il est majoré par e^{-u}, intégrable. Par convergence dominée, $t\,G(t) \to \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$. **Donc** $G(t) \sim \frac{1}{t}$ **en** $+\infty$ **.**

La figure ci-dessous, obtenue par calcul numérique de G, confirme ces trois résultats : la courbe part de $\frac{\pi}{2}$ et rejoint l'hyperbole $\frac{1}{t}$.



Corrigé de l'exercice 9 : Une identité approchée

1. Notons $M = \sup|f|$. L'intégrale existe car $|f(x)e^{-nx}| \leq M\,e^{-nx}$. Le changement de variable $u = nx$ donne

$$n\int_0^{+\infty} f(x)\,e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right)e^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

Pour u fixé, $\frac{u}{n} \to 0$, donc $f(u/n) \to f(0)$ par continuité de f en 0. La limite $u \to f(0)e^{-u}$ est continue. De plus, $|f(u/n)\,e^{-u}| \leq M\,e^{-u}$, intégrable. Par convergence dominée, **la limite vaut** $f(0)\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = f(0)$**.**

2. On a $\int_0^{+\infty} \cos(x)\,e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} e^{(-n+i)x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\,\frac{1}{n-i} = \frac{n}{n^2+1}$. Donc $n\int_0^{+\infty} \cos(x)\,e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{n^2}{n^2+1} \to 1$. **On retrouve bien** $\cos 0 = 1$**.**

3. Le même changement de variable $u = \lambda\,x$ donne $\int_0^{+\infty} f(u/\lambda)\,e^{-u}\,\mathrm{d}u$. La domination $M\,e^{-u}$ ne dépend pas de λ, et $f(u/\lambda) \to f(0)$ quand $\lambda \to +\infty$. Le théorème de convergence dominée pour une famille à paramètre réel conclut. **La limite vaut encore** $f(0)$**.**

Corrigé de l'exercice 10 : Une intégrale égale à ζ(2)

1. Pour $x \in [0,1[$, on a le développement $-\ln(1-x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$. Posons $f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n}$ sur $[0,1[$. Pour $x \in]0,1[$, $\sum_{n\geq 1} f_n(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x}$; en $x = 0$, la somme vaut 1, qui est aussi la limite de $\frac{-\ln(1-x)}{x}$. La somme S est donc continue sur $[0,1[$. Les f_n sont continues, **positives** et intégrables, avec $\int_0^1 f_n = \frac{1}{n^2}$. Le théorème d'intégration terme à terme positive donne $\int_0^1 S = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. Cette somme est finie. **Donc** $\int_0^1 \frac{-\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}$**.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

2. Le changement de variable $x = 1 - u$, bijection C^1 de $]0,1[$ sur lui-même, donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{-u}\,\mathrm{d}u.$$

Cette intégrale vaut donc aussi $\frac{\pi^2}{6}$.

Corrigé de l'exercice 11 : Intégration terme à terme avec des signes alternés

1. Intégrons par parties sur $[\varepsilon, 1]$:

$$\int_\varepsilon^1 x^n \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^n\,\mathrm{d}x.$$

Or $\varepsilon^{n+1}\ln\varepsilon \to 0$ par croissances comparées. En faisant $\varepsilon \to 0$,

$$\int_0^1 x^n \ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. La série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge absolument, donc on peut séparer les termes pairs et impairs. La somme des termes pairs vaut $\sum_{j\geq 1}\frac{1}{4j^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - 2\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{(2j)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12}.$$

La somme vaut $\frac{\pi^2}{12}$.

3. Pour $x \in]0,1[$, $\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$. Posons $f_n(x) = (-1)^n x^n \ln x$ sur $]0,1[$. Ces fonctions sont continues et intégrables, et leur série converge simplement vers $\frac{\ln x}{1+x}$, fonction continue. De plus, par la question 1, $\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{(n+1)^2}$, terme général d'une série convergente.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}.$$

D'après la question 2, l'intégrale vaut $-\frac{\pi^2}{12}$.

Corrigé de l'exercice 12 : La fonction zêta sous forme intégrale

1. Le changement de variable $u = nx$ donne $\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{n^{s-1}} e^{-u} \frac{\mathrm{d}u}{n}$.

   Cette intégrale vaut $\frac{\Gamma(s)}{n^s}$.

2. Pour $x > 0$, $0 < e^{-x} < 1$, donc $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n \geq 1} e^{-nx}$. Posons $f_n(x) = x^{s-1} e^{-nx}$ sur $]0, +\infty[$. Ces fonctions sont continues, positives et intégrables. Leur somme $\frac{x^{s-1}}{e^x - 1}$ est continue. Par le théorème d'intégration terme à terme positive,

   $$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \Gamma(s)\,\zeta(s),$$

   qui est finie car $s > 1$.

3. On a $\Gamma(4) = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\,\mathrm{d}t = 3! = 6$, par trois intégrations par parties. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = 6 \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}$.

4. D'abord, en 0, $e^x - 1 \sim x$, donc $\frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \sim x^{s-2}$. Or $s - 2 \leq -1$, donc cette fonction positive n'est pas intégrable en 0. Ensuite, le théorème positif reste valable dans $[0, +\infty]$: l'intégrale vaut $\Gamma(s) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$. Or cette série de Riemann diverge pour $s \leq 1$. **Dans les deux cas, l'intégrale vaut $+\infty$.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 13 : Une intégrale oscillante

1. On a $\int_0^{+\infty} \sin(x)\, e^{-nx}\, \mathrm{d}x = \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} e^{(-n+i)x}\, \mathrm{d}x = \mathrm{Im}\, \frac{1}{n-i} = \mathrm{Im}\, \frac{n+i}{n^2+1}$. **Cette intégrale vaut** $\frac{1}{n^2+1}$ **.**

2. Les fonctions $x \to \sin(x)\, e^{-nx}$ changent de signe, par exemple sur $[\pi, 2\pi]$ où le sinus est négatif. **Elles ne sont pas positives : le théorème positif ne s'applique pas.**

3. Pour $x > 0$, $\frac{\sin x}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 1} \sin(x)\, e^{-nx}$, somme continue sur $]0, +\infty[$. Les fonctions $f_n(x) = \sin(x)\, e^{-nx}$ sont continues et intégrables. De plus, $|\sin x| \leq x$ pour $x \geq 0$, donc $\int_0^{+\infty} |f_n| \leq \int_0^{+\infty} x\, e^{-nx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$. Ainsi $\sum \int |f_n|$ converge par comparaison. Le théorème d'intégration terme à terme donne $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Point de méthode : il n'est pas nécessaire de calculer $\int |f_n|$ exactement ; une majoration par le terme général d'une série convergente suffit.

Corrigé de l'exercice 14 : Le rêve de l'étudiant

1. Le changement de variable $x = e^{-t}$ est une bijection C^1 de $]0, +\infty[$ sur $]0,1[$, avec $\mathrm{d}x = -e^{-t}\, \mathrm{d}t$ et $-\ln x = t$. Il vient

$$\int_0^1 x^k (-\ln x)^k\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-kt}\, t^k\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^k\, e^{-(k+1)t}\, \mathrm{d}t.$$

Avec $u = (k+1)t$, on obtient $\frac{1}{(k+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} u^k e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}$. **D'où l'égalité demandée.**

2. Pour $x \in]0,1]$, $x^{-x} = e^{-x\ln x} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-x\ln x)^k}{k!}$. Or $-x\ln x \geq 0$ sur $]0,1]$, donc les fonctions $f_k(x) = \frac{x^k(-\ln x)^k}{k!}$ sont positives. Elles sont continues et intégrables, et leur somme x^{-x} est continue. Par le théorème positif et la question 1,

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^{k+1}}.$$

En posant $n = k+1$, on obtient $\sum_{n \geq 1} n^{-n}$.

3. De même, $x^x = e^{x\ln x} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(-x\ln x)^k}{k!}$. Les termes ne sont plus positifs.

Cependant, $\int_0^1 |g_k| = \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$, et $\sum \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$ converge (par exemple car $(k+1)^{-(k+1)} \leq 2^{-(k+1)}$ dès que $k \geq 1$). Le théorème d'intégration terme à terme donne $\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$. **Avec $n = k+1$, c'est $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.**

4. La suite (n^{-n}) décroît vers 0, donc le critère des séries alternées s'applique. Le reste est majoré par le premier terme omis. En s'arrêtant à $n = 4$, l'erreur est au plus $5^{-5} = \frac{1}{3125} < 10^{-3}$. Or $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} \approx 0{,}7831$. **Ainsi $\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x \approx 0{,}783$ à 10^{-3} près.**

Corrigé de l'exercice 15 : La série harmonique alternée

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

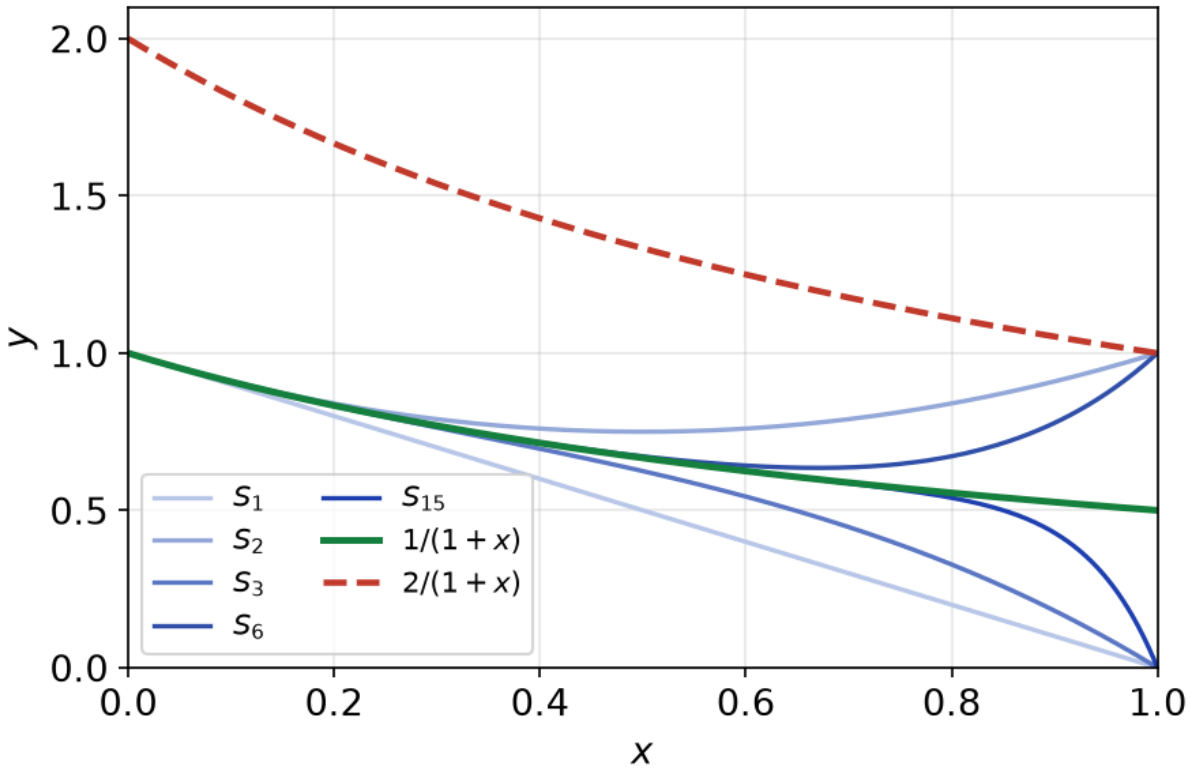
1. On a $\int_0^1 |(-x)^n| \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$. **La série** $\sum \frac{1}{n+1}$ **diverge : l'hypothèse cruciale du théorème fait défaut.**

2. Pour $x \in [0,1[$, la somme géométrique donne $S_N(x) = \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}$. Comme $|(-x)^{N+1}| \leq 1$, on obtient $|S_N(x)| \leq \frac{2}{1+x} \leq 2$. **La constante** 2 **est une dominante intégrable sur** $[0,1[$ **, indépendante de** N **.**

3. Pour $x \in [0,1[$, $(-x)^{N+1} \to 0$, donc $S_N(x) \to \frac{1}{1+x}$, fonction continue. En revanche, en $x = 1$, $S_N(1)$ vaut alternativement 1 et 0 : c'est pourquoi on travaille sur $[0,1[$. Par convergence dominée, $\int_0^1 S_N \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2$. Or, par linéarité, $\int_0^1 S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1}$. **Donc** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$ **.**

4. On a $\ln 2 - \int_0^1 S_N = \int_0^1 \frac{(-x)^{N+1}}{1+x} \, \mathrm{d}x$. Puisque $1 + x \geq 1$, on obtient $\left| \int_0^1 \frac{(-x)^{N+1}}{1+x} \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_0^1 x^{N+1} \, \mathrm{d}x$. **Le reste est donc majoré par** $\frac{1}{N+2}$ **.**

La figure ci-dessous illustre la solution : les sommes partielles oscillent autour de $\frac{1}{1+x}$, avec un écart maximal près de $x = 1$, mais restent sous la dominante.



Corrigé de l'exercice 16 : Choisir la bonne méthode

1. Pour $x \in]0,1[$, $\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}$. Les termes changent de signe, donc le théorème positif est exclu. En revanche, $\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente. La somme est continue sur $]0,1[$. Le **théorème d'intégration terme à terme** s'applique donc :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

2. On factorise $1 + x^3 = (1+x)(x^2 - x + 1)$. La décomposition en éléments simples s'écrit

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{-x+2}{3(x^2 - x + 1)}.$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Ensuite, $\frac{-x+2}{x^2-x+1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$. Le premier morceau s'intègre en $\ln(x^2-x+1)$, qui vaut 0 en 0 et en 1. Le second donne $\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3}$. Finalement,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^3} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

L'intégrale vaut $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

3. Ici, $\int_0^1 x^{3n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3n+1}$ et $\sum \frac{1}{3n+1}$ diverge : le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas. On utilise donc la **convergence dominée sur les sommes partielles**. Pour $x \in [0,1[$, $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-x^3)^n = \frac{1-(-x^3)^{N+1}}{1+x^3}$. Ainsi $S_N(x) \to \frac{1}{1+x^3}$ et $|S_N(x)| \leq 2$. Par convergence dominée, $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 S_N \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$. **Donc** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}8356$.

Corrigé de l'exercice 17 : Une interversion illégitime

1. Pour $m \geq 1$, $\int_0^{+\infty} m\,e^{-mx}\,\mathrm{d}x = 1$. Par linéarité, $\int_0^{+\infty} f_n = 1-1 = 0$. Ainsi $\sum \int_0^{+\infty} f_n = 0$.

2. La somme est télescopique : $\sum_{n=1}^{N} f_n(x) = e^{-x} - (N+1)\,e^{-(N+1)x}$. Pour $x > 0$, $(N+1)e^{-(N+1)x} \to 0$. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = e^{-x}$, et $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$. **On obtient**

$$\int \sum f_n = 1 \neq 0 = \sum \int f_n .$$

3. Si $\sum \int |f_n|$ convergeait, toutes les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme seraient réunies, et les deux quantités seraient égales. **Donc** $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ **diverge.** Vérifions-le. Posons $a = \ln(1+1/n)$. On a $f_n(x) \geq 0$ si et seulement si $e^x \geq \frac{n+1}{n}$, c'est-à-dire $x \geq a$. Une primitive de f_n est $F(x) = -e^{-nx} + e^{-(n+1)x}$, avec $F(0) = 0$ et $F(+\infty) = 0$. Donc

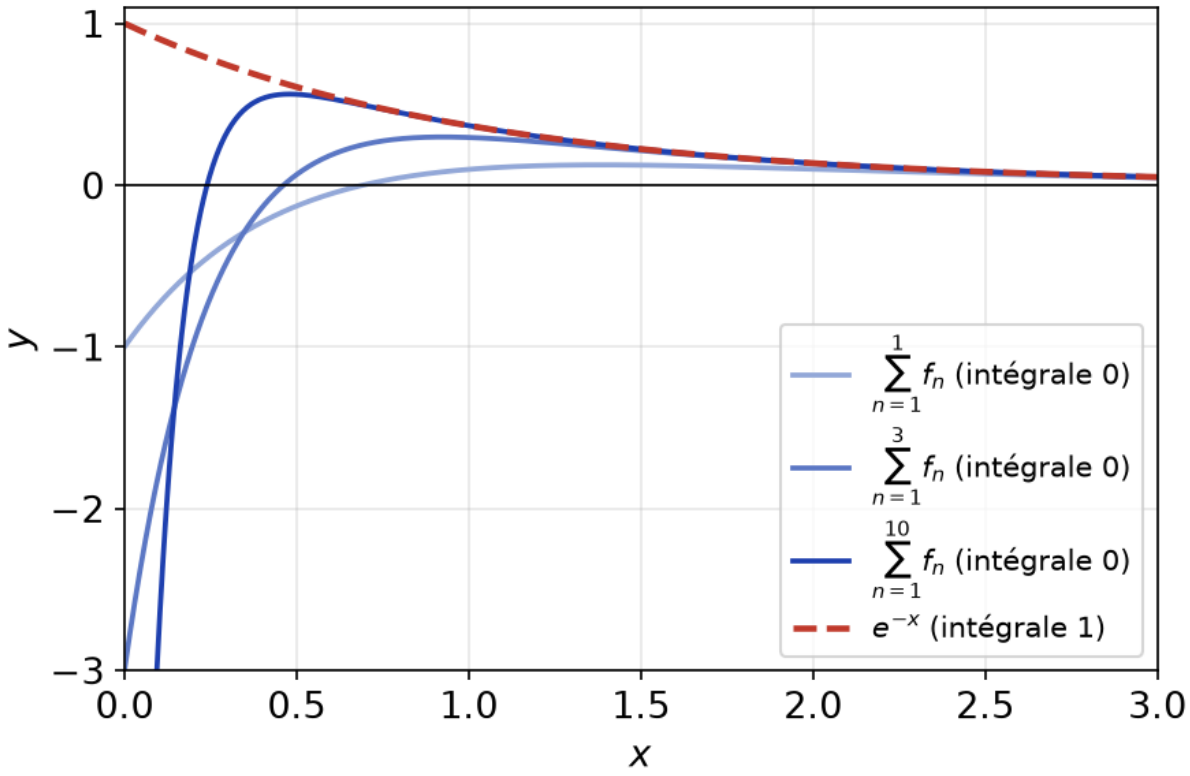
$$\int_0^{+\infty} |f_n| = -\big(F(a) - F(0)\big) + \big(F(+\infty) - F(a)\big) = -2F(a) = 2\big(e^{-na} - e^{-(n+1)a}\big).$$

Or $e^{-a} = \frac{n}{n+1}$, d'où $e^{-na} - e^{-(n+1)a} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$. **Ainsi** $\int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sim \frac{2}{en}$, terme général d'une série divergente.

4. Posons $u_{n,n} = 1$, $u_{n,n+1} = -1$ et $u_{n,k} = 0$ sinon, pour $n, k \in \mathbb{N}$. Chaque ligne n contient un 1 et un -1, donc $\sum_k u_{n,k} = 0$ et $\sum_n \sum_k u_{n,k} = 0$. La colonne $k = 0$ ne contient que $u_{0,0} = 1$. Pour $k \geq 1$, la colonne contient $u_{k,k} = 1$ et $u_{k-1,k} = -1$, de somme nulle. **Donc** $\sum_k \sum_n u_{n,k} = 1 \neq 0$: la famille n'est pas sommable, exactement comme $\sum \int |f_n| = +\infty$.

La figure ci-dessous montre des sommes partielles d'intégrale nulle : une masse négative se concentre près de 0 et disparaît à la limite, laissant e^{-x} d'intégrale 1.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Corrigé de l'exercice 18 : Intégrale de f(x^n)

1. Posons $g_n(x) = f(x^n)$, continue sur $[0,1]$. Pour $x \in [0,1[$, $x^n \to 0$, donc $g_n(x) \to f(0)$ par continuité ; en $x = 1$, $g_n(1) = f(1)$. La limite est continue par morceaux. Notons $M = \max_{[0,1]} |f|$, qui existe car f est continue sur un segment. Alors $|g_n| \le M$, constante intégrable sur $[0,1]$. Par convergence dominée,
$$\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x \to f(0).$$

2. Le changement de variable $x = t^{1/n}$ sur $]0,1]$ donne $\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\,t^{1/n-1}\,\mathrm{d}t$. Comme $\int_0^1 t^{1/n-1}\,\mathrm{d}t = n$, on a aussi $f(0) = \frac{1}{n}\int_0^1 f(0)\,t^{1/n-1}\,\mathrm{d}t$. Posons $h(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t}$ pour $t \in]0,1]$ et $h(0) = f'(0)$: h est continue sur $[0,1]$. Il vient

$$n\left(\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x - f(0)\right) = \int_0^1 h(t)\,t^{1/n}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $t>0$, $t^{1/n}\to 1$. De plus, $|h(t)\,t^{1/n}|\le \max|h|$, constante intégrable sur $[0,1]$. Par convergence dominée, **la limite vaut** $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)-f(0)}{t}\,\mathrm{d}t$.

3. Avec $f(t)=\frac{1}{1+t}$, de classe C^1 sur $[0,1]$, on a $\frac{f(t)-f(0)}{t}=-\frac{1}{1+t}$, d'intégrale $-\ln 2$ sur $[0,1]$. **Donc** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}=1-\frac{\ln 2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$**.** On retrouve ainsi l'exercice 6 : l'intégrale sur $[1,+\infty[$ vaut $\frac{\ln 2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ et compense exactement ce terme.

Corrigé de l'exercice 19 : Problème, formule de Gauss pour la fonction Gamma

1. La fonction $t\to t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$. En 0, elle est équivalente à t^{x-1}, intégrable car $x-1>-1$. En $+\infty$, elle est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$. Donc $\Gamma(x)$ existe. De même, $t^{x-1}(1-t/n)^n\le t^{x-1}$ sur $]0,n]$, et $u^{x-1}(1-u)^n\le u^{x-1}$ sur $]0,1]$. **Les trois intégrales existent.**

2. Posons $h_n(t)=t^{x-1}(1-t/n)^n$ sur $]0,n]$ et $h_n(t)=0$ pour $t>n$. D'après l'exercice 2, $0\le(1-t/n)^n\le e^{-t}$ sur $[0,n]$ et $(1-t/n)^n\to e^{-t}$. Donc $h_n(t)\to t^{x-1}e^{-t}$, fonction continue, et $0\le h_n(t)\le t^{x-1}e^{-t}$, dominante intégrable. Par convergence dominée, $I_n(x)\to\Gamma(x)$**.**

3. Le changement de variable $t=nu$ donne $I_n(x)=\displaystyle\int_0^1 (nu)^{x-1}(1-u)^n\,n\,\mathrm{d}u$. **Ainsi** $I_n(x)=n^x\,J_n(x)$**.**

4. Soit $n\ge 1$. Intégrons par parties sur $[\varepsilon,1]$, en dérivant $(1-u)^n$ et en primitivant u^{x-1} en $\frac{u^x}{x}$:

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$\int_\varepsilon^1 u^{x-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u = \left[\tfrac{u^x}{x}(1-u)^n\right]_\varepsilon^1 + \tfrac{n}{x}\int_\varepsilon^1 u^x\,(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u.$$

Le crochet vaut 0 en 1 car $n \geq 1$, et $\varepsilon^x \to 0$ car $x > 0$. En faisant $\varepsilon \to 0$, $J_n(x) = \frac{n}{x}\,J_{n-1}(x+1)$.

5. Montrons par récurrence sur n que $J_n(y) = \frac{n!}{y(y+1)\ldots(y+n)}$ pour tout $y > 0$. Pour $n = 0$, $J_0(y) = \int_0^1 u^{y-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{y}$. Supposons le résultat au rang $n-1$. Alors

$$J_n(x) = \frac{n}{x}\cdot\frac{(n-1)!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Avec les questions 2 et 3, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^x\,n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$.

6. Pour $x = 1$, l'expression vaut $\frac{n\cdot n!}{(n+1)!} = \frac{n}{n+1} \to 1$, donc $\Gamma(1) = 1$. Ensuite, notons $g_n(x)$ l'expression de Gauss. Un quotient direct donne

$$\frac{g_n(x+1)}{g_n(x)} = \frac{n^{x+1}}{n^x}\cdot\frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{(x+1)\ldots(x+n+1)} = \frac{nx}{x+n+1} \to x.$$

En passant à la limite, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, car $\Gamma(x) > 0$.

Corrigé de l'exercice 20 : Problème, intégrale de Fermi et fonction êta

1. L'intégrande est continue et positive sur $]0,+\infty[$. En 0, il est équivalent à $\frac{x^{s-1}}{2}$, intégrable car $s-1 > -1$. En $+\infty$, il est majoré par $x^{s-1}e^{-x}$, intégrable. Donc $K(s)$ existe. Par ailleurs, la suite (n^{-s}) décroît vers 0 car $s > 0$. **Le critère des séries alternées assure la convergence de** $\eta(s)$**.**

2. Pour $x > 0$, $0 < e^{-x} < 1$, donc $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = e^{-x}\sum\limits_{m\geq 0}(-e^{-x})^m$. **Ainsi** $\frac{1}{e^x+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\,e^{-nx}$.

3. Posons $f_n(x) = (-1)^{n-1}x^{s-1}e^{-nx}$ sur $]0,+\infty[$. Ces fonctions sont continues et

intégrables, et leur somme est la fonction continue $\frac{x^{s-1}}{e^x+1}$. Par l'exercice 12, $\int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$.

Pour $s>1$, cette série converge. Le théorème d'intégration terme à terme donne $K(s) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \Gamma(s)\,\eta(s)$.

4. Pour $0 < s \leq 1$, la série $\sum \frac{\Gamma(s)}{n^s}$ diverge : l'hypothèse cruciale tombe. Considérons alors les sommes partielles. Avec $q = e^{-x}$,

$$S_N(x) = x^{s-1} \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} q^n = x^{s-1} \frac{q\left(1-(-q)^N\right)}{1+q}.$$

Ainsi $S_N(x) \to \frac{x^{s-1}}{e^x+1}$ et $|S_N(x)| \leq 2x^{s-1}e^{-x}$, dominante intégrable indépendante de N. Par convergence dominée, $\int_0^{+\infty} S_N \to K(s)$. Or

$\int_0^{+\infty} S_N = \Gamma(s) \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \to \Gamma(s)\,\eta(s)$. **Donc** $K(s) = \Gamma(s)\,\eta(s)$ **pour tout** $s>0$.

5. On a $K(1) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^{+\infty} = \ln 2$. De plus, $\Gamma(1)=1$ et $\eta(1) = \ln 2$ par l'exercice 15. **Les deux membres valent** $\ln 2$.

6. Pour $s>1$, les séries convergent absolument. Donc $\zeta(s) - \eta(s) = 2\sum_{j \geq 1} \frac{1}{(2j)^s} = 2^{1-s}\zeta(s)$, d'où $\eta(s) = (1-2^{1-s})\,\zeta(s)$. Pour $s=2$, $\Gamma(2)=1$ et $\eta(2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}$. Pour $s=4$, $\Gamma(4)=6$ et $\eta(4) = \frac{7}{8}\cdot\frac{\pi^4}{90}$. **Ainsi** $K(2) = \frac{\pi^2}{12}$ **et** $K(4) = \frac{7\pi^4}{120}$.

Revenir aux énoncés des exercices

Pour aller plus loin en maths spé

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

- Le cours : convergence dominée, cours de maths spé
- Les énoncés : exercices de maths spé sur convergence dominée
- À maîtriser avant : Intégrales généralisées et fonctions intégrables, Séries de fonctions
- Chapitre précédent : Intégrales généralisées et fonctions intégrables
- Chapitre suivant : Intégrales à paramètre
- Tester vos connaissances : QCM de maths spé par chapitre
- Le sommaire : tous les chapitres de maths spé et les chapitres de maths sup