

## Contrôle de maths Terminale : primitives de fonctions usuelles

### Fiche du contrôle

- **Niveau** : Terminale
- **Chapitre** : Primitives et équations différentielles
- **Durée conseillée** : 1 heure 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 6 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
  - Calculer : déterminer une primitive en reconnaissant une forme usuelle
  - Raisonner : vérifier qu'une fonction est une primitive en la dérivant
  - Chercher : identifier des coefficients pour trouver une primitive de la forme  $(ax + b)e^x$
  - Modéliser : passer d'une vitesse à une altitude grâce à une primitive

### Exercice 1 : Vérifier une primitive (3 points)

Calculatrice interdite.

- a. D'abord, montre que la fonction  $F$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $F(x) = x \ln x - x$  est une primitive de la fonction  $\ln$  sur  $]0 ; +\infty[$ . (1 point)
- b. Ensuite, prouve que la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $G(x) = (x^2 + 1)e^x$  est une primitive de la fonction  $g : x \rightarrow (x + 1)^2 e^x$ . (1 point)
- c. Enfin, vérifie que  $H : x \rightarrow \ln(1 + e^x)$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $h : x \rightarrow \frac{e^x}{1 + e^x}$ . Donne alors une autre primitive de  $h$  sur  $\mathbb{R}$ . (1 point)

### Exercice 2 : Primitives de fonctions usuelles (6 points)

Pour chaque fonction, détermine une primitive sur l'intervalle indiqué. Pense donc à reconnaître la forme usuelle avant de calculer.

a.  $f_1(x) = 3x^2 - 4x + 5 - \frac{2}{x^2}$  sur  $]0 ; +\infty[$  (1 point)

b.  $f_2(x) = (2x + 1)(x^2 + x + 3)^4$  sur  $\mathbb{R}$  (1 point)

c.  $f_3(x) = \frac{6x}{x^2 + 4}$  sur  $\mathbb{R}$  (1 point)

d.  $f_4(x) = e^{3x-1} + x e^{x^2}$  sur  $\mathbb{R}$  (1 point)

e.  $f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$  sur  $] -\frac{5}{2} ; +\infty[$  (1 point)

f.  $f_6(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 3\sin x$  sur  $\mathbb{R}$  (1 point)

### Exercice 3 : Primitive vérifiant une condition (3 points)

a. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$ . Détermine alors la primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $F(0) = 1$ . (1,5 point)

b. Soit ensuite  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = e^{2x} - \frac{1}{x}$ . Détermine la primitive  $G$  de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$  qui s'annule en 1. (1,5 point)

### Exercice 4 : Une primitive de $x e^x$ (4 points)

La fonction  $x \rightarrow x e^x$  n'a pas de forme usuelle. On cherche donc une primitive de la forme  $x \rightarrow (ax + b)e^x$ , où  $a$  et  $b$  sont des réels.

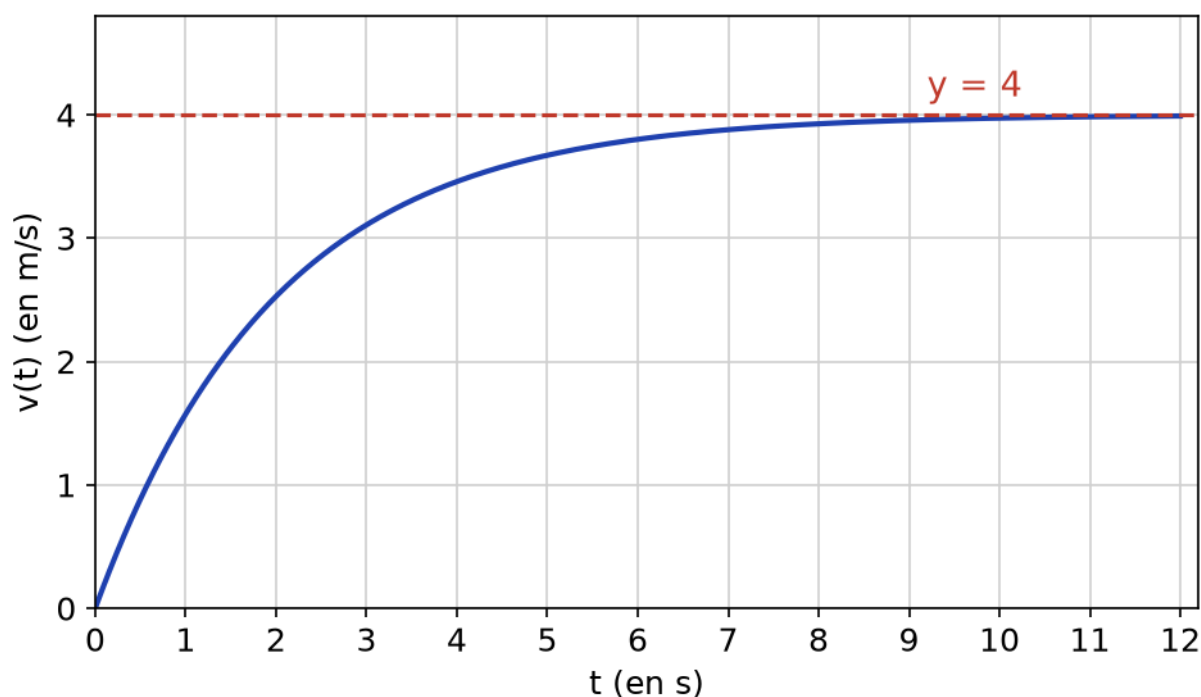
- Soit  $\varphi(x) = (ax + b)e^x$ . Montre que  $\varphi'(x) = (ax + a + b)e^x$ . (1 point)
- Déduis-en ainsi une primitive de  $x \rightarrow x e^x$  sur  $\mathbb{R}$ . (1 point)
- Puis, avec la même méthode, détermine une primitive de  $x \rightarrow (2x + 5)e^x$  sur  $\mathbb{R}$ . (1 point)
- Enfin, trouve une primitive de  $x \rightarrow (x + 1)e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}$ , en la cherchant de la forme  $x \rightarrow (ax + b)e^{-x}$ . (1 point)

### Exercice 5 : L'altitude d'un drone (4 points)

Un drone décolle du sol et s'élève verticalement. Sa vitesse verticale, en mètres par seconde, à l'instant  $t$  en secondes ( $t \geq 0$ ), est :

$$v(t) = 4 - 4e^{-0,5t}.$$

On note  $z(t)$  son altitude en mètres. De plus, on admet que  $z$  est la primitive de  $v$  sur  $[0 ; +\infty[$  telle que  $z(0) = 0$ . Par ailleurs, la courbe de  $v$  est tracée ci-dessous.



- D'abord, détermine l'expression de  $z(t)$  en fonction de  $t$ . (1,5 point)
- Calcule alors la valeur exacte de l'altitude du drone au bout de 2 secondes. (1 point)
- Justifie que l'altitude du drone augmente au cours du temps. (0,5 point)
- Enfin, conjecture sur la figure, puis démontre, la limite de  $v(t)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Interprète ensuite ce résultat. (1 point)



## Réviser avant le contrôle : primitives de fonctions usuelles

Avant de faire ce contrôle, relis le cours « [Les équations différentielles](#) » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [les équations différentielles](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale](#) classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

## **Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème**

---

- [Contrôle de maths Terminale : équations différentielles  \$y' = ay + b\$](#)