

Contrôle de maths Terminale : étude de fonctions avec logarithme

Fiche du contrôle

- **Niveau** : Terminale
- **Chapitre** : La fonction logarithme népérien
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 2 points ; exercice 3 : 7 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : dériver des fonctions comportant $\ln x$ et $\ln(u)$
 - Raisonner : lever une indétermination par les croissances comparées
 - Chercher : dénombrer les solutions d'une équation avec le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires
 - Représenter : relier variations, tangente et convexité à la courbe tracée
 - Communiquer : rédiger une étude de fonction complète

Exercice 1 : Dérivées avec $\ln$ (4 points)

Calculatrice autorisée.

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué, en donnant le résultat sous forme simplifiée.

a. $f(x) = x \ln x - x$ sur $]0 ; +\infty[$ (1 point)

b. $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$ (1 point)

c. $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$ (1 point)

d. $k(x) = \ln(3x - 6)$ sur $]2; +\infty[$ (1 point)

Exercice 2 : Croissances comparées (2 points)

On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$. Déterminer les limites suivantes.

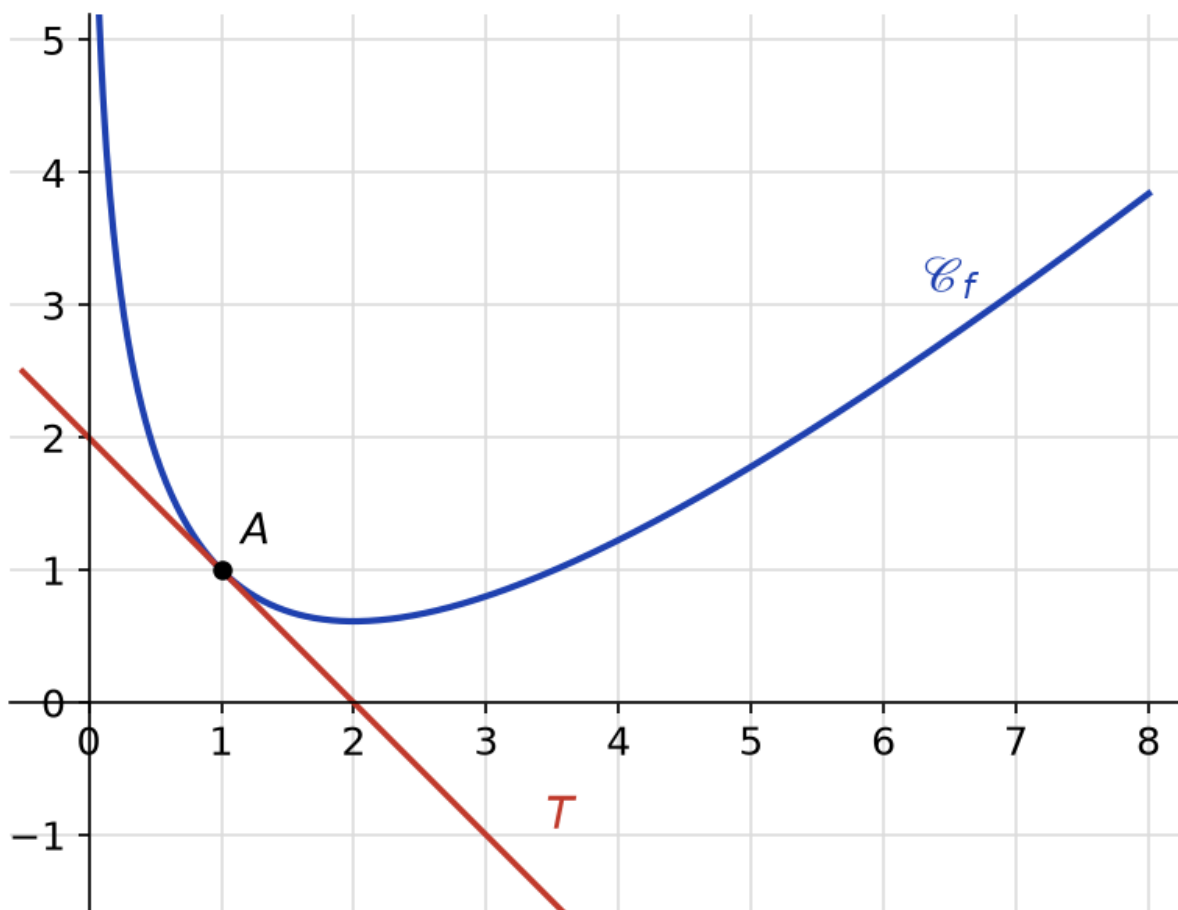
a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ (1 point)

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + 3)$ (0,5 point)

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x)$ (0,5 point)

Exercice 3 : Étude de la fonction $x - 2 \ln x$ (7 points)

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 \ln x$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à C_f au point A d'abscisse 1. La courbe et la tangente sont tracées ci-dessous.



- Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat. (1 point)
- Déterminer la limite de f en $+\infty$. On pourra écrire $f(x) = x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right)$. (1 point)
- Montrer que $f'(x) = \frac{x-2}{x}$ pour tout $x > 0$, puis dresser le tableau de variations de f en précisant la valeur exacte de son minimum. (2 points)
- Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet exactement deux solutions α et β sur $]0; +\infty[$, avec $\alpha < 2 < \beta$. Donner un encadrement de β d'amplitude 0,1. (2 points)
- Déterminer une équation de la tangente T . (1 point)

Exercice 4 : Convexité et inégalité (3 points)

On reprend la fonction f de l'exercice 3, définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2\ln x$, et sa tangente T au point d'abscisse 1.

- Calculer $f''(x)$ et en déduire la convexité de f sur $]0; +\infty[$. (1,5 point)
- En déduire la position de C_f par rapport à T , puis démontrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$. (1,5 point)

Exercice 5 : La fonction $\ln x$ sur x (4 points)

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$, et en déduire les asymptotes à sa courbe. (1 point)
- Étudier les variations de g et donner la valeur exacte de son maximum. (1,5 point)
- Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0,3$ sur $]0; +\infty[$. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : étude de fonctions avec logarithme

Avant de faire ce contrôle, relis le cours [« La fonction logarithme népérien » en Terminale](#) puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [logarithmes](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur

la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : équations et inéquations avec \$\ln\$](#)
- [Contrôle de maths Terminale : suites et fonction logarithme](#)