

Contrôle de maths Terminale : étude d'une fonction trigonométrique

Fiche du contrôle

- **Niveau** : Terminale
- **Chapitre** : Fonctions sinus et cosinus
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 3 points ; exercice 3 : 8 points ; exercice 4 : 6 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : justifier la parité et la périodicité pour réduire l'intervalle d'étude
 - Calculer : dériver des fonctions composées avec sinus et cosinus
 - Représenter : lire le signe d'une expression sur le cercle trigonométrique et dresser un tableau de variations
 - Modéliser : interpréter l'étude d'un signal périodique en termes physiques

Exercice 1 : Parité et périodicité (3 points)

Calculatrice autorisée.

- D'abord, montre que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x \sin x$ est paire. (1 point)
- Ensuite, montre que la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \sin(2x) + \cos(4x)$ est périodique de période π . (1 point)
- Enfin, justifie que la fonction $m : x \rightarrow \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ est définie sur $\mathbb{R}$, puis montre qu'elle est impaire. (1 point)

Exercice 2 : Dériver des fonctions trigonométriques (3 points)

Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes, car elles sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

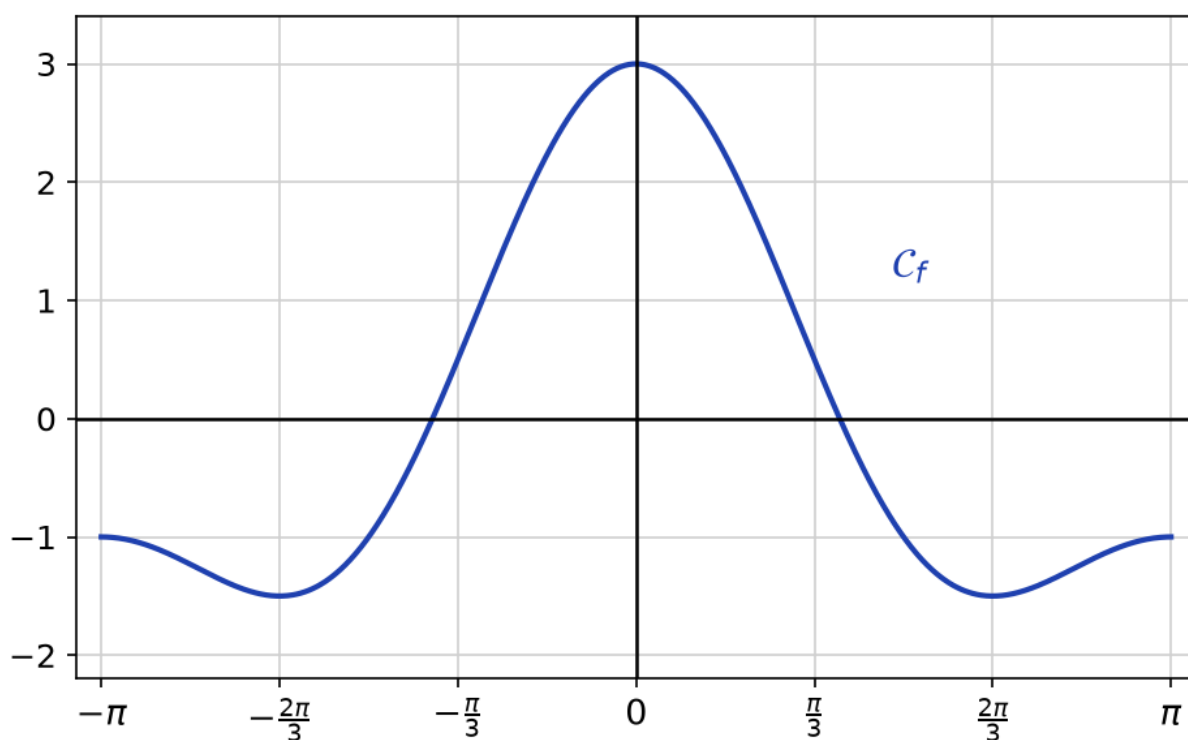
a. $f_1(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ (1 point)

b. $f_2(x) = \cos^2 x$, c'est-à-dire $f_2(x) = (\cos x)^2$ (1 point)

c. $m(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ (la fonction de l'exercice 1) : donne alors $m'(x)$ sous la forme la plus simple possible. (1 point)

Exercice 3 : Étude complète d'une fonction (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) + 2\cos x$. Sa courbe représentative, notée $\mathcal{C}_f$, est tracée ci-dessous sur $[-\pi ; \pi]$.



Rappel : pour tout réel x , $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ et $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

- D'abord, montre que f est périodique de période 2π et qu'elle est paire. Explique alors pourquoi il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$. (1,5 point)
- Ensuite, prouve que, pour tout réel x , $f'(x) = -2\sin x (2\cos x + 1)$. (1,5 point)
- Étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; \pi]$ en t'aidant du cercle trigonométrique. Puis dresse le tableau de variations de f sur $[0 ; \pi]$ avec les valeurs exactes. (2 points)
- Détermine une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. (1 point)
- Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0 ; \pi]$. Combien de solutions admet-elle alors dans $[-\pi ; \pi]$? (1 point)
- Enfin, en posant $X = \cos x$, montre que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Donne ensuite un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} . (1 point)

Exercice 4 : Oscillation d'un ressort (6 points)

Une masse accrochée à un ressort horizontal oscille sans frottement autour de sa position d'équilibre. Sa position (son élongation), en centimètres, à l'instant t en secondes, est donnée par :

$$x(t) = 6\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right), \text{ pour } t \in [0 ; 2].$$

Ainsi, la valeur $x(t) = 0$ correspond à la position d'équilibre. De plus, la vitesse de la masse à l'instant t , en cm/s, est $v(t) = x'(t)$.

- Justifie que la fonction $t \rightarrow 6\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$, définie sur $\mathbb{R}$, est périodique de période 2. Que représente donc cette période pour le ressort ? (1 point)
- Calcule la position de la masse à l'instant $t = 0$. (0,5 point)
- Puis exprime $v(t)$ en fonction de t . (1 point)
- Détermine les instants de $[0 ; 2]$ où la masse passe par sa position d'équilibre. (1,5 point)
- Montre que, pour tout t , $|v(t)| \leq 6\pi$. À quels instants de $[0 ; 2]$ cette vitesse maximale est-elle atteinte ? Donne ensuite sa valeur arrondie au dixième. (1 point)
- Enfin, dresse le tableau de variations de x sur $[0 ; 2]$. Donne alors l'élongation maximale de la masse de part et d'autre de sa position d'équilibre. (1 point)



Réviser avant le contrôle : étude d'une fonction trigonométrique

Avant de faire ce contrôle, relis le cours « [Fonctions sinus et cosinus](#) » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [les fonctions sinus et cosinus](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : fonctions sinus et cosinus](#)