Contrôle de maths Terminale : étude d'une fonction trigonométrique

Fiche du contrôle

- **Niveau :** Terminale
- **Chapitre :** Fonctions sinus et cosinus
- **Durée conseillée :** 2 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 3 points ; exercice 3 : 8 points ; exercice 4 : 6 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : justifier la parité et la périodicité pour réduire l'intervalle d'étude
  - Calculer : dériver des fonctions composées avec sinus et cosinus
  - Représenter : lire le signe d'une expression sur le cercle trigonométrique et dresser un tableau de variations
  - Modéliser : interpréter l'étude d'un signal périodique en termes physiques

Exercice 1 : Parité et périodicité (3 points)

Calculatrice autorisée.

a. D'abord, montre que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\sin x$ est paire. *(1 point)*

b. Ensuite, montre que la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \sin(2x) + \cos(4x)$ est périodique de période π. *(1 point)*

c. Enfin, justifie que la fonction $m : x \to \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$ est définie sur $\mathbb{R}$, puis montre qu'elle est impaire. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 2 : Dériver des fonctions trigonométriques (3 points)

Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes, car elles sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

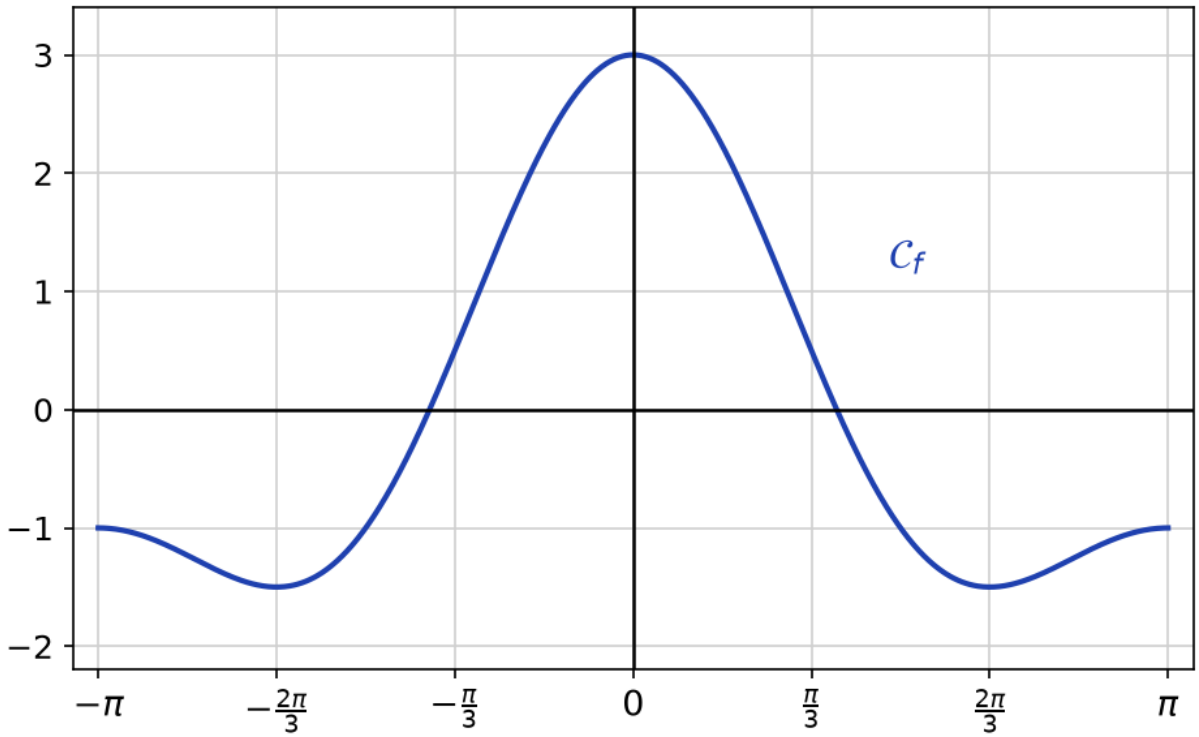
a. $f_1(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ *(1 point)*

b. $f_2(x) = \cos^2 x$, c'est-à-dire $f_2(x) = (\cos x)^2$ *(1 point)*

c. $m(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ (la fonction de l'exercice 1) : donne alors $m'(x)$ sous la forme la plus simple possible. *(1 point)*

Exercice 3 : Étude complète d'une fonction (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) + 2\cos x$. Sa courbe représentative, notée $\mathcal{C}_f$, est tracée ci-dessous sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.



Rappel : pour tout réel x, $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ et $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

a. D'abord, montre que f est périodique de période 2π et qu'elle est paire. Explique alors pourquoi il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$. *(1,5 point)*

b. Ensuite, prouve que, pour tout réel x, $f'(x) = -2\sin x\,(2\cos x + 1)$. *(1,5 point)*

c. Étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ \pi]$ en t'aidant du cercle trigonométrique. Puis dresse le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ \pi]$ avec les valeurs exactes. *(2 points)*

d. Détermine une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. *(1 point)*

e. Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\ ;\ \pi]$. Combien de solutions admet-elle alors dans $[-\pi\ ;\ \pi]$? *(1 point)*

f. Enfin, en posant $X = \cos x$, montre que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Donne ensuite un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 4 : Oscillation d'un ressort (6 points)

Une masse accrochée à un ressort horizontal oscille sans frottement autour de sa position d'équilibre. Sa position (son élongation), en centimètres, à l'instant t en secondes, est donnée par :

$$x(t) = 6\cos\left(\pi\, t - \frac{\pi}{3}\right), \text{ pour } t \in [0\ ;\ 2].$$

Ainsi, la valeur $x(t) = 0$ correspond à la position d'équilibre. De plus, la vitesse de la masse à l'instant t, en cm/s, est $v(t) = x'(t)$.

a. Justifie que la fonction $t \to 6\cos\left(\pi\, t - \frac{\pi}{3}\right)$, définie sur $\mathbb{R}$, est périodique de période 2. Que représente donc cette période pour le ressort ? *(1 point)*

b. Calcule la position de la masse à l'instant $t = 0$. *(0,5 point)*

c. Puis exprime $v(t)$ en fonction de t. *(1 point)*

d. Détermine les instants de $[0\ ;\ 2]$ où la masse passe par sa position d'équilibre. *(1,5 point)*

e. Montre que, pour tout t, $|v(t)| \leq 6\pi$. À quels instants de $[0\ ;\ 2]$ cette vitesse maximale est-elle atteinte ? Donne ensuite sa valeur arrondie au dixième. *(1 point)*

f. Enfin, dresse le tableau de variations de x sur $[0\ ;\ 2]$. Donne alors l'élongation maximale de la masse de part et d'autre de sa position d'équilibre. *(1 point)*

Réviser avant le contrôle : étude d'une fonction trigonométrique

Avant de faire ce contrôle, relis le cours « Fonctions sinus et cosinus » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** les fonctions sinus et cosinus.

Retrouve tous les **contrôles de maths en Terminale** classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP à la Terminale.

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- Contrôle de maths Terminale : fonctions sinus et cosinus

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.