

Contrôle de maths Terminale : espérance, variance et concentration

Fiche du contrôle

- **Niveau** : Terminale
- **Chapitre** : Loi binomiale, sommes de variables aléatoires et concentration
- **Durée conseillée** : 1 heure 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 3 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : espérance, variance et écart type d'une variable aléatoire donnée par sa loi
 - Raisonner : utiliser la linéarité de l'espérance et la variance d'une somme de variables indépendantes
 - Chercher : majorer une probabilité avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ou de concentration
 - Modéliser : déterminer une taille d'échantillon à partir d'un seuil
 - Communiquer : interpréter la loi des grands nombres sur une simulation

Exercice 1 : Le jeu de la roue (4 points)

Calculatrice autorisée.

À la kermesse d'un lycée, une partie de roue coûte 2 €. Selon la case sur laquelle la roue s'arrête, le joueur récupère 0 €, 2 €, 5 € ou 12 €. On note G le gain algébrique du joueur, en euros (somme récupérée moins la mise). La loi de G est donnée ci-dessous, où p est un réel.

Valeur g	-2	0	3	10
$P(G = g)$	0,5	0,25	0,2	p

- Détermine la valeur de p . (0,5 point)
- Calcule l'espérance $E(G)$. (1 point)
- Calcule la variance $V(G)$ puis l'écart type $\sigma(G)$, arrondi au centième. (1,5 point)
- Le jeu est-il favorable au joueur ou à l'organisateur ? Explique ce que signifie $E(G)$ pour l'organisateur qui fait tourner la roue 400 fois dans la journée. (1 point)

Exercice 2 : Des degrés Celsius aux degrés Fahrenheit (3 points)

La température de midi, en degrés Celsius, relevée chaque jour de juin dans une ville est modélisée par une variable aléatoire T d'espérance $E(T) = 20$ et de variance $V(T) = 4$. Un site américain affiche cette température en degrés Fahrenheit : $F = 1,8 T + 32$.

- Calcule $E(F)$. (1 point)
- Calcule $V(F)$ et $\sigma(F)$. (1,5 point)
- Explique pourquoi le nombre 32 n'intervient pas dans le calcul de $V(F)$. (0,5 point)

Exercice 3 : Temps d'attente au snack (4 points)

Dans un snack, la préparation d'un menu se fait en deux étapes : le sandwich, puis la boisson. On note X la durée de préparation du sandwich et Y celle de la boisson, en minutes. On sait que $E(X) = 3$, $V(X) = 0,64$, $E(Y) = 1$ et $V(Y) = 0,36$. Les variables X et Y sont indépendantes. On pose

$T = X + Y$, durée totale de préparation d'un menu.

- Calcule $E(T)$, $V(T)$ et $\sigma(T)$. Quelle hypothèse est indispensable pour le calcul de $V(T)$? (1,5 point)
- Pendant le service de midi, le snack prépare 30 menus. Les durées de préparation T_1 , T_2 , etc., T_{30} sont indépendantes et suivent toutes la même loi que T . On note $S = T_1 + T_2 + T_3 + \text{etc.} + T_{30}$. Calcule $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$, arrondi au dixième. (1,5 point)
- On note $M = \frac{S}{30}$ la durée moyenne de préparation d'un menu sur ce service. Calcule $E(M)$ et $V(M)$. Que remarques-tu en comparant $V(M)$ et $V(T)$? (1 point)

Exercice 4 : Paquets de pâtes (4 points)

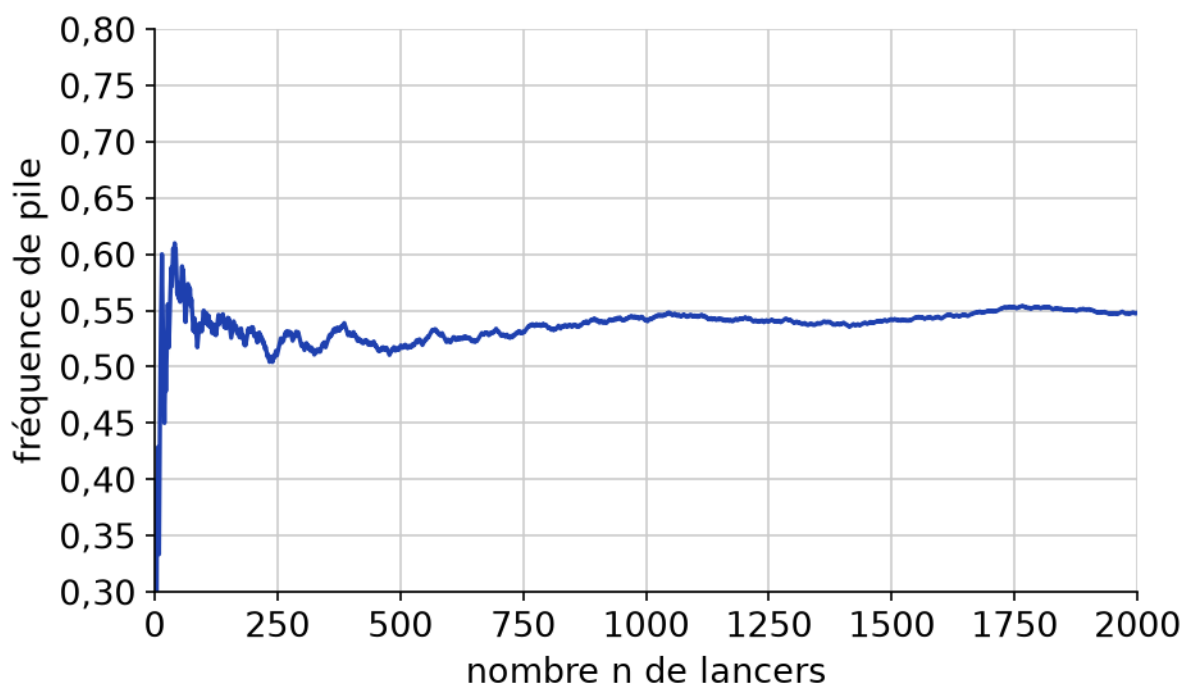
Une machine remplit des paquets de pâtes. La masse d'un paquet, en grammes, est une variable aléatoire X d'espérance $E(X) = 500$ et d'écart type $\sigma(X) = 4$.

- À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majore $P(|X - 500| \geq 10)$. (1 point)
- Déduis-en une minoration de la probabilité qu'un paquet ait une masse strictement comprise entre 490 g et 510 g. (1 point)
- Détermine le plus petit réel δ strictement positif pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev garantit $P(|X - 500| \geq \delta) \leq 0,04$. (1 point)
- Sur un contrôle de 1 000 paquets, 5 % ont une masse hors de l'intervalle $]490 ; 510[$. Ce résultat contredit-il la question b ? Explique. (1 point)

Exercice 5 : La pièce imprimée en 3D (5 points)

Léo a fabriqué une pièce de monnaie avec une imprimante 3D. Elle n'est peut-être pas équilibrée : on note p la probabilité, inconnue, d'obtenir pile. Il lance la pièce n fois ; on note X_i la variable qui vaut 1 si le i -ième lancer donne pile et 0 sinon, et M_n la moyenne de X_1, X_2 , etc., X_n , c'est-à-dire la fréquence de pile. Les lancers sont indépendants.

- On rappelle que $V(X_i) = p(1 - p)$. En étudiant la fonction $f : x \rightarrow x(1 - x)$ sur $[0;1]$, montre que $V(X_i) \leq \frac{1}{4}$. (1 point)
- L'inégalité de concentration donne, pour tout réel $\delta > 0$: $P(|M_n - p| \geq \delta) \leq \frac{V(X_1)}{n\delta^2}$.
Pour $n = 1000$ et $\delta = 0,05$, montre que $P(|M_n - p| \geq 0,05) \leq 0,1$ et traduis ce résultat par une phrase. (1,5 point)
- Détermine un nombre de lancers n qui garantit, quelle que soit la valeur de p , que $P(|M_n - p| \geq 0,02) \leq 0,05$. (1,5 point)
- Léo a simulé 2 000 lancers ; la figure donne la fréquence de pile en fonction du nombre de lancers. Énonce la loi des grands nombres et propose, à l'aide de la figure, une estimation de p . (1 point)





Réviser avant le contrôle : espérance, variance et concentration

Avant de faire ce contrôle, relis le cours [« Les probabilités conditionnelles » en Terminale](#) puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [probabilités](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : épreuves indépendantes et loi binomiale](#)
- [Contrôle de maths Terminale : dénombrement et loi binomiale](#)