

Contrôle de maths Terminale : dérivation et calcul intégral

Fiche du contrôle

- **Niveau** : Terminale
- **Chapitres** : Dérivation et convexité + Calcul d'intégrales
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 7 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : dériver un produit et une composée, déterminer des primitives et des intégrales
 - Raisonner : étudier variations, convexité et point d'inflexion à partir des dérivées
 - Chercher : mener une intégration par parties et appliquer le théorème des valeurs intermédiaires
 - Représenter : relier une intégrale à l'aire d'un domaine sous une courbe
 - Communiquer : interpréter une aire en unités et une valeur moyenne

Exercice 1 : Dérivée, primitive et intégrale (3 points)

Calculatrice autorisée.

- a. Calcule la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3x - 1)e^{2x}$, et écris-la sous forme factorisée. (1 point)
- b. Détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction k définie par $k(x) = xe^{x^2}$. (1 point)

- c. Calcule la valeur exacte de $I = \int_0^1 (e^{2x} + 3) dx$, puis donne l'arrondi au centième. (1 point)

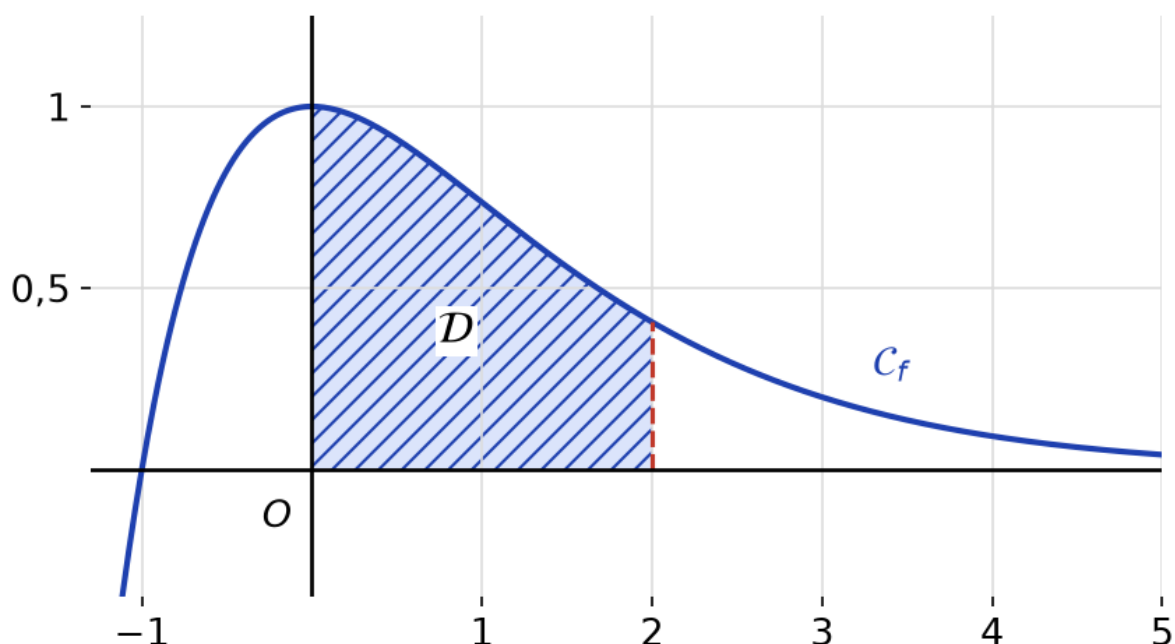
Exercice 2 : Étude d'une fonction exponentielle (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- Détermine la limite de f en $-\infty$. En remarquant que $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}$, détermine la limite de f en $+\infty$ et interprète-la graphiquement. (1,5 point)
- Montre que, pour tout réel x , $f'(x) = -xe^{-x}$. Dresse le tableau de variations complet de f . (2 points)
- Calcule $f''(x)$. Étudie la convexité de f et montre que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A dont tu donneras les coordonnées exactes. (2 points)
- Détermine une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A . Précise, sans calcul supplémentaire, la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T . (1,5 point)

Exercice 3 : Aire sous la courbe (5 points)

On reprend la fonction f de l'exercice 2. Le domaine $\mathcal{D}$ est délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. Les unités graphiques sont 2 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée. (La figure n'est pas à l'échelle.)



a. Justifie que f est positive sur $[0; 2]$. (0,5 point)

b. À l'aide d'une intégration par parties, montre que $\int_0^2 f(x) dx = 2 - 4e^{-2}$. (2,5 points)

c. Déduis-en l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en cm^2 , arrondie au centième. (1 point)

d. Calcule la valeur moyenne de f sur $[0; 2]$, valeur exacte et arrondi au millièm. (1 point)

Exercice 4 : Un domaine qui s'étend à l'infini (5 points)

Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, où f est la fonction de l'exercice 2.

a. Justifie que F est dérivable sur $[0; +\infty[$, précise $F'(x)$ et déduis-en le sens de variation de F . (1 point)

- b. Montre que, pour tout $x \geq 0$, $F(x) = 2 - (x + 2)e^{-x}$. Vérifie la cohérence avec l'exercice 3. (1,5 point)
- c. Détermine la limite de F en $+\infty$ et interprète le résultat en termes d'aire. (1 point)
- d. Montre que l'équation $F(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$ et donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} . Interprète α graphiquement. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : dérivation et calcul intégral

Avant de faire ce contrôle, relis le cours « [La dérivée d'une fonction](#) » en Terminale et « [Calculs d'intégrales](#) » en Terminale puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [dérivée d'une fonction](#), [intégrales et primitives](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : dérivée d'une composée et variations](#)
- [Contrôle de maths Terminale : convexité et points d'inflexion](#)
- [Contrôle de maths Terminale : intégrales et intégration par parties](#)
- [Contrôle de maths Terminale : aires et valeur moyenne d'une fonction](#)