

Contrôle de maths Terminale : convexité et points d'inflexion

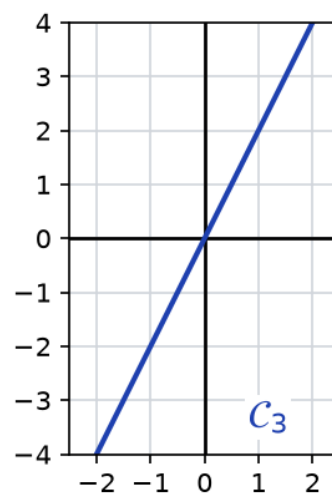
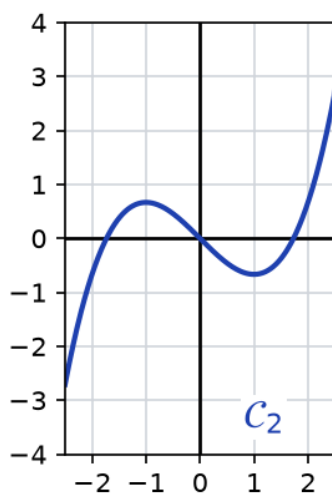
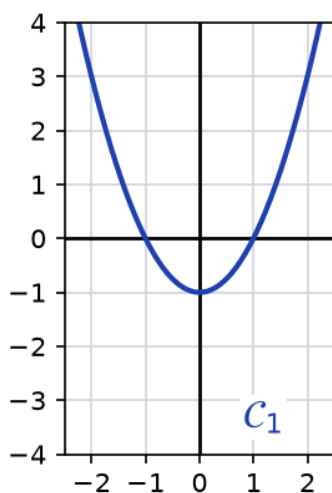
Fiche du contrôle

- **Niveau** : Terminale
- **Chapitre** : Dérivation et convexité
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Représenter : associer les courbes d'une fonction, de sa dérivée et de sa dérivée seconde
 - Calculer : déterminer une dérivée seconde et étudier son signe
 - Raisonner : déduire une inégalité de la position d'une courbe par rapport à ses tangentes
 - Modéliser : interpréter un point d'inflexion dans un contexte médical
 - Communiquer : justifier une réponse à une affirmation par une preuve ou un contre-exemple

Exercice 1 : Associer une fonction à ses dérivées (4 points)

Calculatrice autorisée.

Une fonction f est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a tracé ci-dessous, sur l'intervalle $[-2,5 ; 2,5]$, trois courbes C_1 , C_2 et C_3 : l'une représente f , une autre sa dérivée f' et la dernière sa dérivée seconde f'' .



- Associer chaque courbe à f , à f' et à f'' , en justifiant à l'aide des liens entre le signe d'une dérivée et les variations d'une fonction. (2 points)
- En déduire, sur $[-2,5 ; 2,5]$, l'intervalle sur lequel f est convexe et celui sur lequel elle est concave. (1 point)
- La courbe de f admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, donner ses coordonnées lues sur le graphique. (1 point)

Exercice 2 : Convexité d'une fonction polynôme (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

- Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$. (1 point)
- Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. (1 point)
- Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion A dont on donnera les coordonnées. (0,5 point)
- Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A . (0,5 point)

- e. Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) - (-3x + 9) = (x - 2)^3$. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T , et expliquer pourquoi ce résultat était prévisible. (1 point)

Exercice 3 : Une inégalité de convexité (4 points)

- a. Justifier que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. (0,5 point)
- b. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0. (0,5 point)
- c. En déduire que, pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$. (1 point)
- d. Soit n un entier naturel non nul. En appliquant l'inégalité précédente à $x = \frac{1}{n}$, démontrer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$. (1,5 point)
- e. À la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-4} près de $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$ et la comparer à celle de e . (0,5 point)

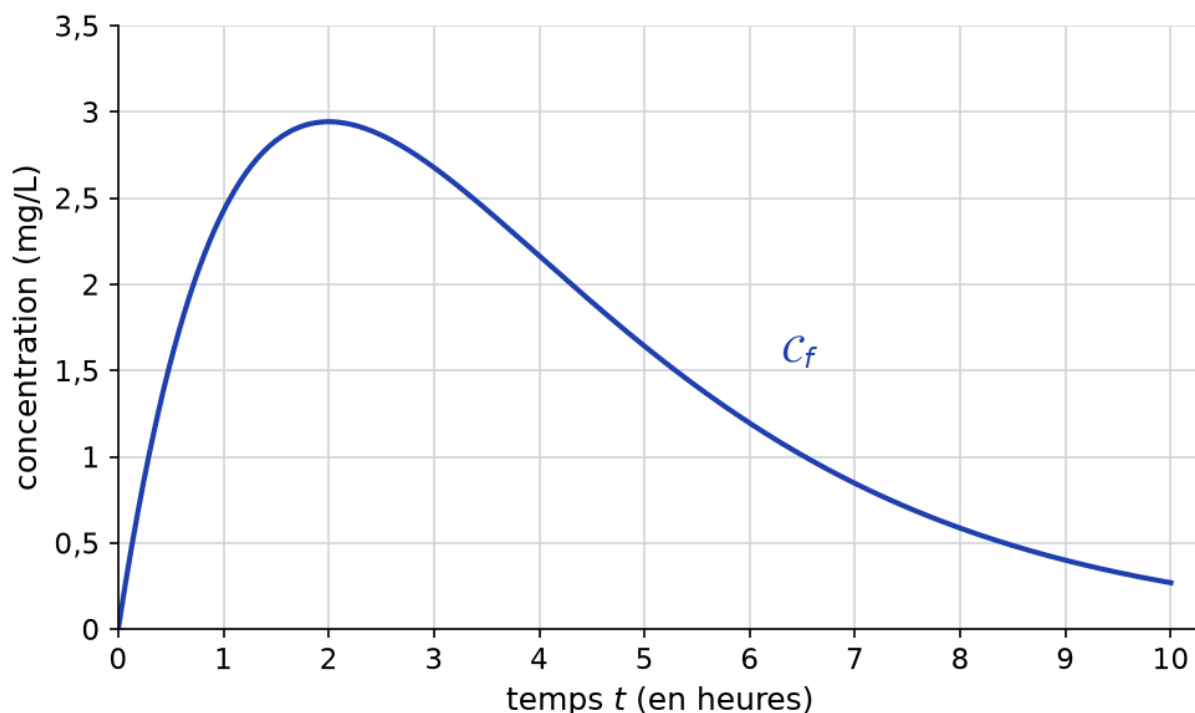
Exercice 4 : Vrai ou faux sur la convexité (3 points)

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- a. Affirmation 1 : « Si une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}$, alors f' est croissante sur $\mathbb{R}$. » (1 point)
- b. Affirmation 2 : « La courbe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^4$ admet un point d'inflexion à l'origine, car $g''(0) = 0$. » (1 point)
- c. Affirmation 3 : « La courbe de la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = x e^x$ est située au-dessus de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $[-2 ; +\infty[$. » (1 point)

Exercice 5 : Concentration d'un médicament (5 points)

Un patient reçoit un médicament par voie orale. La concentration du médicament dans son sang, en milligrammes par litre (mg/L), est modélisée t heures après la prise par la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(t) = 4te^{-0,5t}$. Sa courbe $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-dessous.



- Montrer que, pour tout t de $[0 ; 10]$, $f'(t) = (4 - 2t)e^{-0,5t}$. (1 point)
- Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 10]$. À quel instant la concentration est-elle maximale ? Donner cette concentration maximale arrondie au centième. (1 point)
- Montrer que, pour tout t de $[0 ; 10]$, $f''(t) = (t - 4)e^{-0,5t}$. (1 point)
- Étudier la convexité de f sur $[0 ; 10]$ et donner les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ (ordonnée arrondie au centième). (1 point)
- Le médecin affirme : « Quatre heures après la prise, la concentration diminue le plus vite. » Justifier cette affirmation à l'aide de la question d, puis calculer la vitesse de diminution à cet instant,

arrondie au centième. (1 point)



Réviser avant le contrôle : convexité et points d'inflexion

Avant de faire ce contrôle, relis le cours [« La dérivée d'une fonction » en Terminale](#) puis entraîne-toi avec les **exercices corrigés** [dérivée d'une fonction](#).

Retrouve tous les [contrôles de maths en Terminale classés par chapitre](#), ou choisis un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP à la Terminale](#).

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- [Contrôle de maths Terminale : dérivée d'une composée et variations](#)
- [Contrôle de maths Terminale : dérivation et calcul intégral](#)